2012/2013
62. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala 17. – 20. 3. 2013.*)

1. Nájdite všetky dvojice celých čísel a, b, pre ktoré platí rovnosť

$$\frac{a^2+1}{2b^2-3}=\frac{a-1}{2b-1}.$$

(*Pavel Novotný*)

2. Každý zo zbojníkov v n-člennej družine ($n \geqq 3$) nazbíjal určitý počet mincí. Všetkých nazbíjaných mincí bolo $100n$. Zbojníci sa rozhodli podeliť korisť nasledujúcim spôsobom: v každom kroku dá jeden zo zbojníkov po jednej minci iným dvom. Nájdite všetky prirodzené čísla $n \geqq 3$, pre ktoré po konečnom počte krokov môže mať každý zbojník 100 mincí bez ohľadu na to, koľko mincí jednotliví zbojníci nazbíjali.

(*Ján Mazák*)

3. V rovnobežníku $ABCD$ so stredom S označme O stred kružnice vpísanej trojuholníku ABD a T bod jej dotyku s uhlopriečkou BD. Dokážte, že priamky OS a CT sú rovnobežné. (*Jaromír Šimša*)

4. Na tabuli je napísané v desiatkovej sústave celé kladné číslo N. Ak nie je jednociferné, zotrieme jeho poslednú cifru c a číslo m, ktoré na tabuli ostane, nahradíme číslom $|m-3c|$. (Ak napríklad bolo na tabuli číslo $N = 1\,204$, po úprave tam bude $120 - 3 \cdot 4 = 108$.) Nájdite všetky prirodzené čísla N, z ktorých opakovaním opísanej úpravy nakoniec dostaneme číslo 0. (*Peter Novotný*)

5. Daný je rovnobežník $ABCD$ taký, že päty K, L kolmíc spustených z bodu D postupne na strany AB, BC sú ich vnútornými bodmi. Dokážte, že $KL \parallel AC$ práve vtedy, keď

$$|\measuredangle BCA| + |\measuredangle ABD| = |\measuredangle BDA| + |\measuredangle ACD|.$$

(*Ján Mazák*)

6. Nájdite všetky kladné reálne čísla p také, že

$$\sqrt{a^2+pb^2}+\sqrt{b^2+pa^2} \geqq a+b+(p-1)\sqrt{ab}$$

platí pre ľubovoľnú dvojicu kladných reálnych čísel a, b. (*Jaromír Šimša*)