1999/2000
49. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 18. – 24. 7. 2000.*)

1. Dve kružnice Γ_1 a Γ_2 sa pretínajú v dvoch bodoch M a N. Nech priamka AB je ich spoločnou dotyčnicou, pričom bod A leží na kružnici Γ_1, bod B na Γ_2 a navyše bod M je k priamke AB bližšie než bod N. Nech CD je priamka rovnobežná s AB a prechádzajúca bodom M, pričom bod C leží na kružnici Γ_1 a bod D na Γ_2. Priamky AC a BD sa pretínajú v bode E, priamky AN a CD v bode P a priamky BN a CD v bode Q. Dokážte, že $|EP| = |EQ|$. (*Rusko*)

2. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla také, že $abc = 1$. Dokážte nerovnosť

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqq 1.$$

(*Bielorusko*)

3. Nech $n \geqq 2$ je prirodzené číslo a λ je kladné reálne číslo. Na začiatku máme na vodorovnej priamke n bĺch, nie všetky v jednom bode. V jednom kroku si môžeme zvoliť dve blchy v nejakých bodoch A a B, pričom A je naľavo od B, a blchu z bodu A necháme skočiť do bodu C, ktorý je napravo od B a platí $|BC| : |AB| = \lambda$.

Určte všetky hodnoty λ také, že pre ľubovoľný bod M na danej priamke a ľubovoľnú začiatočnú pozíciu bĺch, existuje konečná postupnosť krokov, po ktorej budú všetky blchy napravo od bodu M. (*USA*)

4. Kúzelník má sto kartičiek očíslovaných číslami $1, 2, \dots, 100$. Rozdelí ich do troch krabíc (červenej, bielej a modrej) tak, že v každej krabici je aspoň jedna kartička. Divák z hľadiska vytiahne dve kartičky z dvoch rôznych krabíc a nahlas oznámi súčet čísel na týchto kartičkách. Na základe tejto informácie dokáže kúzelník určiť, z ktorej krabice nebola vytiahnutá žiadna kartička. Určte koľkými spôsobmi môže kúzelník rozdeliť kartičky do krabíc tak, aby tento trik fungoval. (*Maďarsko*)

5. Zistite, či existuje prirodzené číslo n také, že n má práve 2000 prvočíselných deliteľov a $2^n + 1$ je deliteľné číslom n. (*Rusko*)

6. Nech AH_1, BH_2, CH_3 sú výšky v ostrouhlom trojuholníku ABC. Jemu vpísaná kružnica sa dotýka strán BC, CA, AB postupne v bodoch T_1, T_2, T_3. Uvažujme obrazy priamok H_1H_2, H_2H_3, H_3H_1 v osovej súmernosti postupne podľa priamok T_1T_2, T_2T_3, T_3T_1. Dokážte, že tieto obrazy vytvárajú trojuholník, ktorého vrcholy ležia na kružnici vpísanej trojuholníku ABC. (*Rusko*)