62. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Celoštátne kolo kategórie A

17. – 20. marec 2013

Košice

1. *Nájdite všetky dvojice celých čísel a, b, pre ktoré platí rovnosť*

$$\frac{a^2+1}{2b^2-3} = \frac{a-1}{2b-1}.$$

(*Pavel Novotný*)

Riešenie. Zrejme $a \neq 1$, preto môžeme danú rovnosť prepísať v tvare

$$\frac{a^2+1}{a-1} = \frac{2b^2-3}{2b-1}. \tag{1}$$

Najskôr preskúmame možnosť, že čitateľ druhého zlomku je záporný, t. j. $b \in \{-1, 0, 1\}$:

- ▷ Pre $b = -1$ dostaneme po úprave kvadratickú rovnicu $3a^2 - a + 4 = 0$, ktorá nemá reálne riešenie.
- ▷ Pre $b = 0$ dostaneme rovnicu $a^2 - 3a + 4 = 0$, ani táto rovnica reálne riešenie nemá.
- ▷ Pre $b = 1$ dostaneme rovnicu $a^2 + 1 = -a + 1$, ktorú upravíme na tvar $a(a+1) = 0$. Rovnica má dve riešenia $a \in \{0, -1\}$, máme teda dve dvojice $(0, 1)$ a $(-1, 1)$, ktoré vyhovujú zadaniu.

Ďalej predpokladáme, že $2b^2 - 3 > 0$, teda že oba zlomky v (1) majú kladné čitatele. Zistíme, akými prirodzenými číslami sa dajú tieto zlomky krátiť.

Ak $n \mid a^2 + 1$ a zároveň $n \mid a - 1$, tak $n \mid (a^2 + 1) - (a + 1)(a - 1) = 2$. Podobne, ak $n \mid 2b^2 - 3$ a zároveň $n \mid 2b - 1$, tak $n \mid (2b - 1)(2b + 1) - 2(2b^2 - 3) = 5$. Sú teda štyri možnosti, ako dosiahnuť rovnosť zlomkov (1):

(i) $a^2 + 1 = 2b^2 - 3$ a $a - 1 = 2b - 1$; dosadením $a = 2b$ do prvej rovnice dostaneme $4b^2 + 1 = 2b^2 - 3$, táto rovnica však nemá reálne riešenie.

(ii) $a^2 + 1 = 2(2b^2 - 3)$ a $a - 1 = 2(2b - 1)$; dosadíme $a = 4b - 1$ do prvej rovnice, po úprave dostaneme rovnicu $3b^2 - 2b + 2 = 0$, ktorá v obore reálnych čísel riešenie nemá.

(iii) $5(a^2 + 1) = 2b^2 - 3$ a $5(a - 1) = 2b - 1$; dosadíme $a = \frac{1}{5}(2b + 4)$ do prvej rovnice, po úprave dostaneme kvadratickú rovnicu $3b^2 - 8b - 28 = 0$, ktorá má celočíselné riešenie $b = -2$. Tomu zodpovedá $a = 0$.

(iv) $5(a^2 + 1) = 2(2b^2 - 3)$ a $5(a - 1) = 2(2b - 1)$; dosadíme $a = \frac{1}{5}(4b + 3)$ do prvej rovnice a dostaneme $b^2 - 6b - 16 = 0$. Táto kvadratická rovnica má dva celočíselné korene $b = -2$ a $b = 8$, ktorým zodpovedajú hodnoty $a = -1$ a $a = 7$.

Vyhovuje teda 5 celočíselných dvojíc (a, b):

$$(0, 1),\ (-1, 1),\ (0, -2),\ (-1, -2),\ (7, 8).$$

Iné riešenie. Rovnicu (1) z prvého riešenia upravíme na tvar

$$a + 1 + \frac{2}{a-1} = b + \frac{b-3}{2b-1}. \tag{2}$$

Zrejme platí, že

$$\text{ak } a \leqq -2, \text{ tak } \quad -1 < \frac{2}{a-1} < 0 \qquad \text{a ak } a \geqq 4, \text{ tak } \quad 0 < \frac{2}{a-1} < 1. \tag{3}$$

Taktiež možno ľahko ukázať, že

$$\text{ak } b \leqq -3 \text{ alebo } b \geqq 4, \text{ tak} \quad 0 < \frac{b-3}{2b-1} < 1. \tag{4}$$

Preto najskôr vypočítame hodnoty oboch zlomkov v (1) pre $a \in \{-1, 0, 2, 3\}$ ($a \neq 1$) a $b \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$:

a	-1	0	2	3
$\dfrac{a^2+1}{a-1}$	-1	-1	5	5

b	-2	-1	0	1	2	3
$\dfrac{2b^2-3}{2b-1}$	-1	$\frac{1}{3}$	3	-1	$\frac{5}{3}$	3

Porovnaním oboch tabuliek nájdeme rýchlo štyri riešenia: $(-1, -2)$, $(-1, 1)$, $(0, -2)$, $(0, 1)$. Žiadne iné riešenia pre $a \in \{-1, 0, 2, 3\}$ neexistujú, pretože z prvej tabuľky vidíme, že ľavá strana v (2) je pre tieto hodnoty celočíselná, zatiaľ čo pre $b \notin \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ pravá strana podľa (4) celočíselná nie je. Podobne neexistujú ďalšie riešenia ani pre $b \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$: prípady $b = -1$ a $b = 2$ možno overiť priamym dosadením a vyriešením rovnice s neznámou a, v ostatných prípadoch je pravá strana v (2) celočíselná, zatiaľ čo ľavá strana pre $a \notin \{-1, 0, 2, 3\}$ podľa (3) celočíselná nie je.

Pre zvyšné hodnoty a, b platí

$$-1 < \frac{b-3}{2b-1} - \frac{2}{a-1} = a + 1 - b < 2,$$

a pretože $a + 1 - b$ je celé číslo, sú len dve možnosti: $a + 1 - b = 0$ alebo $a + 1 - b = 1$.

Ak $a = b - 1$, dostaneme z (2)

$$\frac{2}{b-2} = \frac{b-3}{2b-1} \qquad \text{a odtiaľ} \quad b^2 - 9b + 8 = 0,$$

čiže $b = 1$ alebo $b = 8$. Máme teda jedno ďalšie riešenie $(7, 8)$.

Ak $a = b$, dostaneme z (2)

$$\frac{2}{b-1} + 1 = \frac{b-3}{2b-1}, \qquad \text{odtiaľ} \quad b^2 + 5b - 4 = 0;$$

táto rovnica celočíselné riešenie nemá.

---

2. *Každý zo zbojníkov v n-člennej družine ($n \geqq 3$) nazbíjal určitý počet mincí. Všetkých nazbíjaných mincí bolo $100n$. Zbojníci sa rozhodli podeliť korisť nasledujúcim spôsobom: v každom kroku dá jeden zo zbojníkov po jednej minci iným dvom. Nájdite všetky prirodzené čísla $n \geqq 3$, pre ktoré po konečnom počte krokov môže mať každý zbojník 100 mincí bez ohľadu na to, koľko mincí jednotliví zbojníci nazbíjali.* (Ján Mazák)

Riešenie. Označme z_i počet mincí, ktoré má i-ty zbojník (čísla z_i sa v priebehu delenia menia).

Nech $n = 3$. Po ľubovoľnom kroku sa nezmení zvyšok po delení čísla $z_1 - z_2$ tromi[1]. Ak teda napríklad boli začiatočné stavy $z_1 = 101$, $z_2 = 100$ a $z_3 = 99$, nemôže nikdy nastať rovnosť $z_1 = z_2$. Takže číslo $n = 3$ nevyhovuje.

[1] Buď sa obe čísla zväčšia o 1, teda ich rozdiel sa nezmení, alebo sa jedno zmenší o 2 a druhé zväčší o 1, teda ich rozdiel sa zmenší alebo zväčší o 3.

Ukážeme, že pre každé $n \geqq 4$ a ľubovoľné začiatočné hodnoty z_i dosiahneme po konečnom počte vhodných krokov stav, v ktorom bude mať každý zbojník 100 mincí.

Označme $s = \sum_{i=1}^{n} |z_i - 100|$. Číslo s budeme zmenšovať, kým to bude možné, tak, že v každom kroku niektorý zo zbojníkov, ktorí majú najviac, dá po jednej minci niektorým dvom, ktorí majú najmenej. Nech už sa takým spôsobom číslo s nedá zmenšiť. Ak $s = 0$, skončili sme.

Ak $s \neq 0$, má niektorý zbojník $100 - k$ mincí ($k > 0$), k zbojníkov má po 101 mincí a všetci ostatní majú po 100 (v každej inej situácii, t. j. ak by existovali dvaja zbojníci s počtom mincí menším ako 100 alebo ak by existoval zbojník s aspoň 102 mincami, by sme zrejme hodnotu s jedným krokom opísaným vyššie zmenšili). Ak $k \geqq 2$, zmenšíme hodnotu s dvoma krokmi:

$$100 - k, 101, 101 \quad\longrightarrow\quad 100 - k + 1, 102, 99 \quad\longrightarrow\quad 100 - k + 2, 100, 100.$$

Ak je k párne, po $\frac{1}{2}k$ takých dvojkrokoch bude mať každý zbojník 100 mincí. Ak je k nepárne, dostaneme sa do stavu, v ktorom má jeden zbojník 99 mincí, jeden ich má 101 a všetci ostatní (tí sú pri $n \geqq 4$ aspoň dvaja) majú po 100. Potom už delenie ľahko dokončíme:

$$99, 100, 100, 101 \quad\longrightarrow\quad 99, 101, 101, 99 \quad\longrightarrow\quad 99, 102, 99, 100 \quad\longrightarrow\quad 100, 100, 100, 100.$$

Iné riešenie. (Prípad $n \geqq 4$.) Pre neprázdnu množinu zbojníkov Z označme $r(Z)$ rozdiel medzi počtami mincí najbohatšieho a najchudobnejšieho člena množiny Z. Na začiatku vyberieme niektorého najbohatšieho zbojníka A (ľubovoľného z tých, ktorí nazbíjali najviac mincí). Označme Z množinu zvyšných zbojníkov. Ak $r(Z) \geqq 2$, tak jeden z najbohatších zbojníkov zo Z dá jednu mincu najchudobnejšiemu a jednu zbojníkovi A. Takto pokračujeme ďalej, pokiaľ platí $r(Z) \geqq 2$. Keďže počet mincí zbojníka A stále narastá a mincí je len konečný počet, po konečnom počte krokov bude $r(Z) \leqq 1$.

Od takého okamihu v každom ďalšom kroku dá zbojník A, ak má aspoň 102 mincí, po jednej minci dvom najchudobnejším. Nerovnosť $r(Z) \leqq 1$ ostáva zrejme zachovaná. Keď prvý raz nastane situácia, že zbojník A bude mať menej ako 102 mincí, budú dve možnosti: Ak bude mať zbojník A 100 mincí, je delenie skončené. Ak bude mať 101 mincí, musí mať jeden zo zbojníkov 99 mincí a všetci ostatní zo Z po 100. Delenie potom skončíme tak ako v prvom riešení.

---

3. *V rovnobežníku $ABCD$ so stredom S označme O stred kružnice vpísanej trojuholníku ABD a T bod jej dotyku s uhlopriečkou BD. Dokážte, že priamky OS a CT sú rovnobežné.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Označme $a = |AB|$, $b = |AD|$ a $c = |BD|$. Prípad $a = b$ je triviálny: $ABCD$ je kosoštvorec a obidve priamky OS a CT sú totožné s priamkou AC. Budeme teda predpokladať, že $a > b$ (v prípade $a < b$ stačí vymeniť označenie bodov B a D).

Označme T' obraz bodu T v stredovej súmernosti podľa stredu S, v ktorej A je obrazom bodu C. Keďže $CT \parallel AT'$, môžeme namiesto vzťahu $OS \parallel CT$ dokazovať, že $OS \parallel AT'$. Označme P priesečník priamky AO s uhlopriečkou BD. Dokážeme, že trojuholníky POS a PAT' sú rovnoľahlé (obr. 1). Predpoklad $a > b$ zaručuje, že P je vnútorným bodom úsečky DS, T je vnútorným bodom úsečky DP a T' vnútorným bodom úsečky SB.

Bod T' je dotykovým bodom kružnice vpísanej trojuholníku DBC so stranou BD, a ako je známe, je to súčasne bod, v ktorom sa strany BD dotýka kružnica k' pripísaná trojuholníku ABD. Označme ϱ polomer kružnice k vpísanej trojuholníku ABD a ϱ' polomer kružnice k'. Bod P leží na spojnici stredov kružníc k a k' aj na ich spoločnej dotyčnici, je teda stredom rovnoľahlosti týchto kružníc. Preto platí rovnosť

$$\frac{|PT'|}{|PT|} = \frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{a+b+c}{a+b-c}.$$

Ak označíme $|ST'| = |ST| = x$ a $|SP| = y$, máme

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{a+b+c}{a+b-c}, \qquad \text{odtiaľ} \quad \frac{x}{y} = \frac{a+b}{c},$$

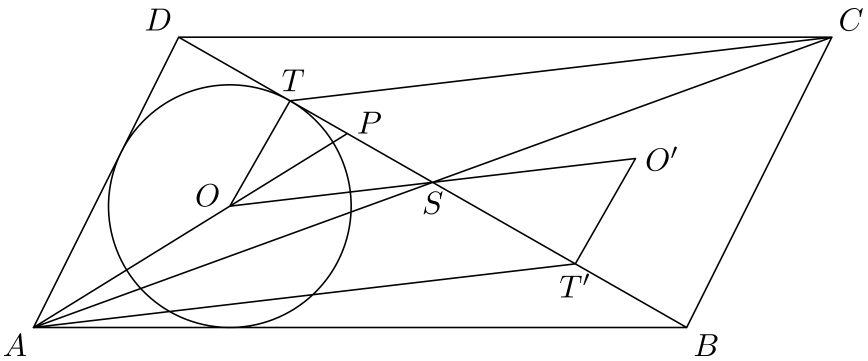
takže

$$\frac{|PT'|}{|PS|} = \frac{x+y}{y} = \frac{a+b+c}{c}.$$

Ak označíme v veľkosť výšky trojuholníka ABD z vrcholu A, platí

$$\frac{|PA|}{|PO|} = \frac{v}{\varrho} = \frac{a+b+c}{c} = \frac{|PT'|}{|PS|}.$$

Tým je rovnoľahlosť trojuholníkov PAT' a POS, a teda aj rovnobežnosť priamok AT' a OS, dokázaná.



Obr. 1

Iné riešenie. Ako je známe,

$$|DT| = \frac{b+c-a}{2}, \quad \text{a preto} \quad |T'S| = |TS| = \frac{c}{2} - \frac{b+c-a}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

Keďže AP je osou uhla BAD a DO je osou uhla ADB, platia známe rovnosti

$$|BP| : |PD| = |AB| : |AD| \quad \text{a} \quad |AO| : |OP| = |AD| : |DP|,$$

z ktorých postupne dostaneme

$$|BP| = \frac{ac}{a+b} \quad \text{a} \quad |DP| = \frac{bc}{a+b},$$

$$|SP| = |BP| - |BS| = \frac{ac}{a+b} - \frac{c}{2} = \frac{c(a-b)}{2(a+b)},$$

$$\frac{|AO|}{|OP|} = \frac{|AD|}{|DP|} = \frac{b}{\frac{bc}{a+b}} = \frac{a+b}{c}.$$

Dokážeme, že takú istú hodnotu má zlomok $|T'S|/|SP|$:

$$\frac{|T'S|}{|SP|} = \frac{\frac{a-b}{2}}{\frac{c(a-b)}{2(a+b)}} = \frac{a+b}{c}.$$

Tým je rovnoľahlosť trojuholníkov PAT' a POS dokázaná.

Iné riešenie. (Analytické.) Zvoľme karteziánsku súradnicovú sústavu tak, že $A = [0,0]$, $B = [1,0]$, $D = [a,b]$. Potom $C = [a+1,b]$, $S = [\frac{1}{2}(a+1), \frac{1}{2}b]$. Bod O má rovnakú vzdialenosť od strán trojuholníka ABD, jeho súradnice $[x,y]$ teda vyhovujú sústave rovníc

$$y = \frac{bx - ay}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-bx + (a-1)y + b}{\sqrt{(a-1)^2+b^2}}.$$

Ak označíme $c = \sqrt{(a-1)^2+b^2}$, $d = \sqrt{a^2+b^2}$, dostaneme

$$O = \left[\frac{a+d}{c+d+1}, \frac{b}{c+d+1}\right].$$

Ďalej

$$T = B + \left(1 - \frac{a+d}{c+d+1}\right)\frac{D-B}{c} = \frac{1}{c+d+1}\left[c+d+a-\frac{(1-a)^2}{c}, b\left(\frac{1-a}{c}+1\right)\right].$$

Overenie lineárnej závislosti vektorov

$$S - O = \left[\frac{a+1}{2} - \frac{a+d}{c+d+1}, \frac{b}{2}\left(1 - \frac{2}{c+d+1}\right)\right]$$

a

$$C - T = \left[a + 1 - \frac{c+d+a-\frac{(1-a)^2}{c}}{c+d+1}, b\left(1 - \frac{\frac{1-a}{c}+1}{c+d+1}\right)\right],$$

čiže rovnosti

$$\begin{aligned}&[(a+1)(c+d+1) - 2a - 2d]\left(c + d - \frac{1-a}{c}\right) = \\ &\quad = \left[(a+1)(c+d+1) - c - d - a + \frac{(1-a)^2}{c}\right](c+d-1)\end{aligned}$$

je už rutinnou záležitosťou.

4. *Na tabuli je napísané v desiatkovej sústave celé kladné číslo N. Ak nie je jednociferné, zotrieme jeho poslednú cifru c a číslo m, ktoré na tabuli ostane, nahradíme číslom $|m-3c|$. (Ak napríklad bolo na tabuli číslo $N = 1\,204$, po úprave tam bude $120 - 3 \cdot 4 = 108$.) Nájdite všetky prirodzené čísla N, z ktorých opakovaním opísanej úpravy nakoniec dostaneme číslo 0.* (Peter Novotný)

Riešenie. Pre viacciferné číslo $N = 10m+c$ (pričom $c \in \{0, 1, \cdots, 9\}$ a m je prirodzené) označme $u(N) = |m-3c|$. Najskôr zistíme, pre ktoré čísla N platí $u(N) = 0$. Rovnosť $|m-3c| = 0$ platí práve vtedy, keď $m = 3c$; potom $N = 10m + c = 31c$. Dokážeme, že úlohe vyhovujú práve všetky násobky čísla 31. Platí totiž

$$31 \mid 10m + c \iff 31 \mid 30m + 3c \iff 31 \mid -m + 3c,$$

čiže

$$31 \mid N \iff 31 \mid u(N). \tag{1}$$

Keďže pre každé $N \geqq 20$ platí $u(N) < N$, po konečnom počte krokov z každého čísla N vznikne nejaké celé nezáporné číslo menšie ako 20. Číslo 0 podľa (1) vznikne práve vtedy, keď je N násobok čísla 31.

5. *Daný je rovnobežník $ABCD$ taký, že päty K, L kolmíc spustených z bodu D postupne na strany AB, BC sú ich vnútornými bodmi. Dokážte, že $KL \parallel AC$ práve vtedy, keď*

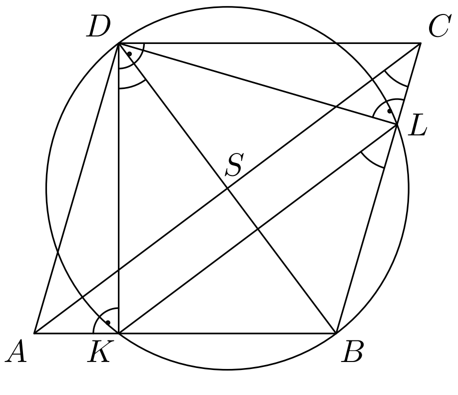
$$|\measuredangle BCA| + |\measuredangle ABD| = |\measuredangle BDA| + |\measuredangle ACD|.$$

(Ján Mazák)

Riešenie. Striedavé uhly ABD a CDB sú zhodné (obr. 2), preto $|\measuredangle BCA| + |\measuredangle ABD| + |\measuredangle BDA| + |\measuredangle ACD| = 180°$. Rovnosť $|\measuredangle BCA| + |\measuredangle ABD| = |\measuredangle BDA| + |\measuredangle ACD|$ teda platí práve vtedy, keď

$$|\measuredangle BCA| + |\measuredangle ABD| = 90°. \tag{1}$$

Body K a L ležia na Tálesovej kružnici s priemerom BD. Obvodový uhol BDK je



Obr. 2

zhodný s uhlom BLK, preto (vzhľadom na rovnosť striedavých uhlov ABD a CDB)

$$|\measuredangle BLK| + |\measuredangle ABD| = |\measuredangle BDK| + |\measuredangle CDB| = 90°.$$

Priamky KL a AC sú zrejme rovnobežné práve vtedy, keď $|\measuredangle BLK| = |\measuredangle BCA|$, čo je podľa predošlej rovnosti ekvivalentné s (1). Tým je požadovaná ekvivalencia dokázaná.

6. *Nájdite všetky kladné reálne čísla p také, že*

$$\sqrt{a^2+pb^2}+\sqrt{b^2+pa^2} \geqq a+b+(p-1)\sqrt{ab}$$

platí pre ľubovoľnú dvojicu kladných reálnych čísel a, b. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Pre dvojicu $a = b = 1$ dostaneme pre parameter $p > 0$ nerovnicu, ktorú vyriešime:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{p+1} &\geqq p+1,\\ 2 &\geqq \sqrt{p+1},\\ p &\leqq 3. \end{aligned}$$

Ukážeme, že každé $p \in (0,3\rangle$ vyhovuje.

Pre $p \in (0,1\rangle$ daná nerovnosť platí, lebo vtedy

$$\sqrt{a^2+pb^2} > a, \quad \sqrt{b^2+pa^2} > b \quad \text{a} \quad (p-1)\sqrt{ab} \leqq 0.$$

Zaoberajme sa preto ďalej iba prípadom $p \in (1,3\rangle$. Ľavú stranu L dokazovanej nerovnosti môžeme chápať ako súčet veľkostí dvoch vektorov $(a, b\sqrt{p})$, $(b, a\sqrt{p}) \in \mathbb{R}^2$, preto podľa trojuholníkovej nerovnosti

$$\begin{aligned} L = \sqrt{a^2+pb^2}+\sqrt{b^2+pa^2} &= |(a,b\sqrt{p})| + |(b,a\sqrt{p})| \geqq \\ &\geqq |(a+b,(a+b)\sqrt{p})| = (a+b)\sqrt{1+p}. \end{aligned} \tag{1}$$

Pre pravú stranu P pomocou nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom naopak dostávame horný odhad

$$P = a+b+(p-1)\sqrt{ab} \leqq a+b+(p-1)\frac{a+b}{2} = \frac{(p+1)(a+b)}{2}.$$

Nerovnosť $L \geqq P$ je tak dokázaná, pretože silnejšia nerovnosť

$$(a+b)\sqrt{p+1} \geqq \frac{(p+1)(a+b)}{2}$$

je ekvivalentná s nerovnosťou $\sqrt{p+1} \leqq 2$, ktorá je pre každé $p \in (1,3\rangle$ zrejme splnená.

Poznámka. Odhad (1) sa dá dostať aj použitím Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti pre dvojice $(a, b\sqrt{p})$ a $(1, \sqrt{p})$: z nerovnosti

$$a+pb \leqq \sqrt{a^2+pb^2}\cdot\sqrt{1+p},$$

vyplýva prvá z nerovností

$$\sqrt{a^2+pb^2} \geqq \frac{a+pb}{\sqrt{1+p}}, \qquad \sqrt{b^2+pa^2} \geqq \frac{b+pa}{\sqrt{1+p}},$$

druhú odvodíme analogicky.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Pavel Novotný, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013