62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9*

Informácia pre krajskú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

1. *V malom kráľovstve prišli poddaní pozdraviť nového kráľa a jeho ministra. Každý priniesol nejaký darček: 60 najchudobnejších prinieslo len vlastnoručne vyrobenú drevenú sošku, tí bohatší buď 2 zlatky, alebo 3 strieborniaky. Pritom strieborniakov bolo darovaných viac ako 40, ale menej ako 100. Všetky sošky dostal minister a k tomu ešte sedminu všetkých zlatiek a tretinu všetkých strieborniakov. Kráľ aj jeho minister dostali rovnaký počet predmetov. Zistite, koľko mohlo byť poddaných, koľko mohlo byť darovaných zlatiek a koľko strieborniakov.* (M. Volfová)

Riešenie. Označme počet zlatiek z a počet strieborniakov s. Zlatky boli darované po dvoch, teda z je párne číslo, strieborniaky po troch, teda s je deliteľné tromi. Pritom s je medzi 40 a 100. Minister dostal 60 sošiek a $\frac{1}{7}z + \frac{1}{3}s$ mincí, kráľ dostal $\frac{6}{7}z + \frac{2}{3}s$ mincí. Z toho vyplýva, že z musí byť deliteľné siedmimi, čo s predchádzajúcou podmienkou znamená, že z musí byť deliteľné 14. Kráľ aj jeho minister dostali rovnaký počet predmetov, čo pri našom označení dáva rovnicu

$$60 + \frac{z}{7} + \frac{s}{3} = \frac{6z}{7} + \frac{2s}{3}, \tag{1}$$

po úprave

$$\frac{5z}{7} + \frac{s}{3} = 60,$$
$$15z + 7s = 7 \cdot 3 \cdot 60. \tag{2}$$

Hľadáme všetky celočíselné riešenia rovnice (2), ktoré vyhovujú vyššie uvedeným podmienkam. Keď vyjadríme neznámu z,

$$z = 84 - \frac{7s}{15}, \tag{3}$$

vidíme, že s musí byť deliteľné 15. V úvode sme si všimli, že z má byť párne, teda aj hodnota výrazu $\frac{7}{15}s$ musí byť párna, čo znamená, že také s musí byť párne číslo. Preto s musí byť deliteľné 30, čo vzhľadom na podmienku $40 < s < 100$ znamená, že s môže byť jedine 60 a 90. Pre obe tieto možnosti dopočítame z podľa (3), počet poddaných potom určíme ako $60 + \frac{1}{3}s + \frac{1}{2}z$. Úloha má nasledujúce dve riešenia (uvedomte si, že všetky vyššie spomenuté podmienky sú splnené):

strieborniakov	zlatiek	poddaných
60	56	108
90	42	111

Iné riešenie. Rovnicu (2) možno riešiť aj tak, že vyjadríme neznámu s:

$$s = 180 - \frac{15z}{7}.$$

Z úvodu vieme, že z musí byť deliteľné 14, preto za z postupne dosadzujeme násobky 14 a sledujeme, či platí $40 < s < 100$. Ak áno, vypočítame počet poddaných ako $60 + \frac{1}{3}s + \frac{1}{2}z$ (uvedomte si, že ostatné vyššie uvedené podmienky sú splnené):

zlatiek	strieborniakov	poddaných
14	150	
28	120	
42	**90**	**111**
56	**60**	**108**
70	30	

Ďalej nepokračujeme, pretože s bude vychádzať menšie ako 40; úloha má dve riešenia.

Návrh hodnotenia. 2 body za zostavenie rovnice (1) a jej následnú úpravu; 2 body za nájdenie jednej možnosti; 1 bod za nájdenie druhej možnosti; 1 bod za zdôvodnenie, že riešení nie je viac.

---

2. *Matej mal v riadku v zošite napísaných šesť rôznych prirodzených čísel. Druhé z nich bolo dvojnásobkom prvého, tretie bolo dvojnásobkom druhého a podobne každé ďalšie číslo bolo dvojnásobkom predchádzajúceho. Matej všetky tieto čísla opísal do nasledujúcej tabuľky, a to v ľubovoľnom poradí, do každého políčka jedno:*

Súčet oboch čísel v prvom stĺpci tabuľky bol 136 a súčet čísel v druhom stĺpci bol dvojnásobný, teda 272. Určte súčet čísel v treťom stĺpci tabuľky. (Libor Šimůnek)

Riešenie. Najmenšie dopĺňané číslo označíme neznámou a a pomocou nej vyjadríme všetky dopĺňané čísla:

$$a,\ 2a,\ 4a,\ 8a,\ 16a,\ 32a.$$

V prvom stĺpci nemôže byť číslo $32a$, pretože súčet ktorýchkoľvek iných dvoch dopĺňaných čísel je menší než $32a$, a teda by súčet čísel v druhom stĺpci nemohol byť väčší ako v prvom. Možné súčty čísel prvého stĺpca sú:

$$\begin{array}{cccc}
a + 2a = 3a & 2a + 4a = 6a & 4a + 8a = 12a & 8a + 16a = 24a \\
a + 4a = 5a & 2a + 8a = 10a & 4a + 16a = 20a & \\
a + 8a = 9a & 2a + 16a = 18a & & \\
a + 16a = 17a & & &
\end{array}$$

Prirodzené číslo, ktoré v týchto súčtoch násobí neznámu a, musí byť deliteľom čísla $136 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17$. Tomu vyhovuje jedine súčet

$$17a = a + 16a.$$

Súčet čísel druhého stĺpca je potom $34a$ a tento možno získať jedine ako

$$34a = 2a + 32a.$$

Na doplnenie do tretieho stĺpca teda ostávajú čísla $4a$ a $8a$. Z rovnice $17a = 136$ dostaneme $a = 8$; súčet čísel v treťom stĺpci je teda

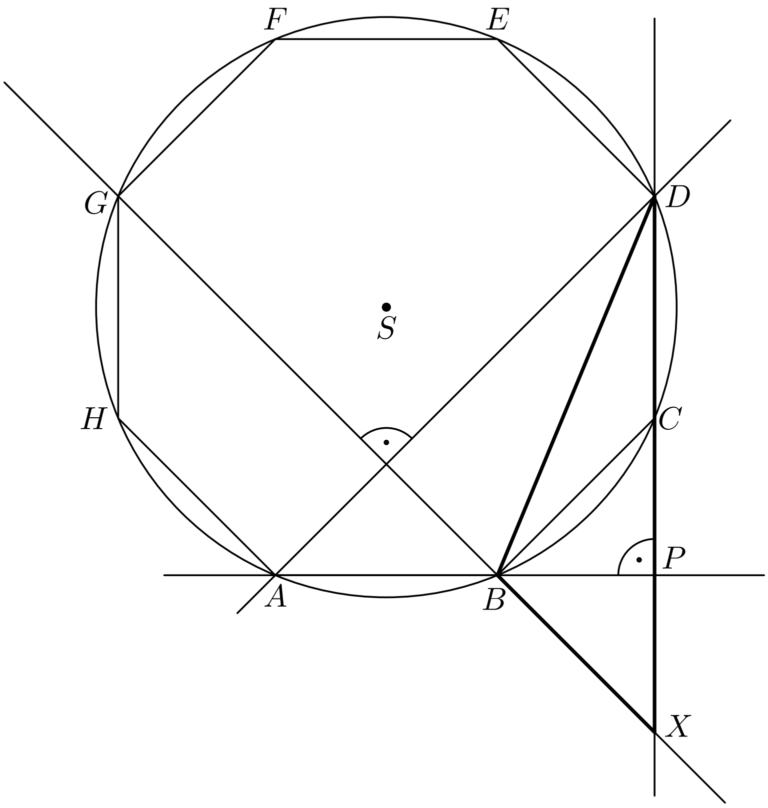
$$4a + 8a = 12a = 12 \cdot 8 = 96.$$

Návrh hodnotenia. 3 body za poznatok, že v prvom stĺpci je a a $16a$, vrátane zdôvodnenia, že sa jedná o jedinú možnosť; 1 bod za poznatok, že v treťom stĺpci je $4a$ a $8a$; 2 body za výsledok 96.

---

3. *Daný je pravidelný osemuholník $ABCDEFGH$ a bod X taký, že bod A je ortocentrom (t. j. priesečníkom výšok) trojuholníka BDX. Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov tohto trojuholníka.* (*Vojtěch Žádník*)

Riešenie. Bod A má byť priesečníkom výšok v trojuholníku BDX. To znamená, že na spojnici bodu A s vrcholom B leží výška na stranu DX, podobne na spojnici A s vrcholom D leží výška na stranu BX. Strana DX je teda kolmá na priamku AB, podobne strana BX je kolmá na priamku AD (obr. 1).



Obr. 1

Vzhľadom na to, že body A, B a D sú vrcholmi pravidelného osemuholníka, platí:

1. Kolmica na AB prechádzajúca bodom D je priamka CD. (Vonkajší uhol pravidelného osemuholníka má veľkosť 45°. Uhol medzi AB a CD je uhlom pri vrchole P v trojuholníku BPC, a preto je pravý.)
2. Kolmica na AD predchádzajúca bodom B je priamka BG. (AD a BG sú uhlopriečky rovnobežné so stranami BC a AH. Tieto sú rovnako ako strany AB a CD kolmé, a preto sú uvedené uhlopriečky kolmé.)
3. Bod X je priesečníkom priamok CD a BG.

Teraz už ľahko určíme veľkosti všetkých uhlov v trojuholníku BDX. Trojuholník BCD je rovnoramenný s ramenami BC a CD, pričom uhol BCD je vnútorným uhlom pravidelného osemuholníka. Odtiaľ dopočítame

$$|\measuredangle CDB| = |\measuredangle CBD| = \frac{1}{2}(180^\circ - 135^\circ) = 22{,}5^\circ.$$

Priamky AD a BC sú rovnobežné, uhol medzi AD a BG je pravý, preto aj uhol CBX je pravý. Odtiaľ vyjadríme

$$|\measuredangle DBX| = 22{,}5^\circ + 90^\circ = 112{,}5^\circ.$$

Posledný neznámy vnútorný uhol v trojuholníku BDX má veľkosť

$$|\measuredangle DXB| = 180^\circ - 22{,}5^\circ - 112{,}5^\circ = 45^\circ.$$

Návrh hodnotenia. 3 body za nájdenie bodu X; po 1 bode za hľadané uhly vrátane zdôvodnenia.

Poznámka. Podobnú úlohu poznáme z domáceho kola (**Z9–I–4**), takže úvodný rozbor je možné zostručniť: X je priesečníkom výšok v trojuholníku ABD.

V riešení niekoľkokrát používame zásadný poznatok, že súčet veľkostí vnútorných uhlov v ľubovoľnom trojuholníku je 180°. Z toho vyplýva aj to, že veľkosť vnútorného uhla v pravidelnom osemuholníku je 135°.

---

4. *V slove TESTOVANIE majú byť nahradené rovnaké písmenká rovnakými nenulovými ciframi a rôzne písmenká rôznymi nenulovými ciframi. Pritom súčin cifier výsledného čísla má byť druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla. Nájdite najväčšie číslo, ktoré možno nahradením písmen pri splnení uvedených podmienok získať.*

(Eva Patáková)

Riešenie. V slove TESTOVANIE je 8 rôznych písmen. Môžeme používať len nenulové cifry, vyberáme teda osem cifier z deviatich možných. Súčin

$$T^2 \cdot E^2 \cdot S \cdot O \cdot V \cdot A \cdot N \cdot I$$

má byť druhou mocninou prirodzeného čísla. Cifry T a E sú v súčine v druhej mocnine, stačí preto zabezpečiť, aby súčin

$$S \cdot O \cdot V \cdot A \cdot N \cdot I \tag{1}$$

bol druhou mocninou prirodzeného čísla, t. j. aby v jeho prvočíselnom rozklade boli všetky prvočísla v párnej mocnine. Uvažujme, ktoré činitele môžeme dosadzovať:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	$2 \cdot 2$	5	$2 \cdot 3$	7	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$3 \cdot 3$

Cifry 5 a 7 nemôžeme v súčine (1) použiť, pretože ich nemáme čím doplniť do druhej mocniny. Číslo, ktoré vznikne nahradením písmen v slove TESTOVANIE, má byť čo najväčšie, preto sa snažíme postupne dopĺňať čo najväčšie hodnoty za T, E, S atď.

Ak za T zvolíme 9, ostane pre súčin (1) šestica cifier 8, 6, 4, 3, 2, 1. Po dosadení tento súčin vychádza $2^7 \cdot 3^2$, čo nevyhovuje vyššie uvedenej požiadavke.

Ak za T zvolíme 8, ostane pre súčin (1) šestica 9, 6, 4, 3, 2, 1, ktorá po dosadení dáva $2^4 \cdot 3^4$, čo uvedenej požiadavke vyhovuje. Týmito ciframi nahradíme S, O, V, A, N, I práve v tomto zostupnom poradí. Pre A potom ostávajú cifry 5 alebo 7 – vyberieme väčšie z nich. Hľadané číslo je

$$8\,798\,643\,217.$$

Návrh hodnotenia. 2 body za poznatok, že cifry 5 a 7 nemôžu byť v súčine (1); 2 body za zdôvodnenie, že treba zvoliť $T = 8$; 2 body za výsledné číslo.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Erika Novotná, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Erika Novotná, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013