2008/2009
58. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh MEMO*

(*Súťaž sa konala 24. – 29. 9. 2009.*)

Súťaž jednotlivcov:

I1. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y))$$

pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$, pričom $\mathbb{R}$ označuje množinu všetkých reálnych čísel. (*Slovinsko*)

I2. Majme $n \geqq 3$ rôznych farieb. Nech $f(n)$ označuje najväčšie celé číslo s vlastnosťou, že každá strana a každá uhlopriečka konvexného mnohouholníka majúceho $f(n)$ vrcholov sa dá ofarbiť jednou z n farieb nasledujúcim spôsobom:

- použité sú aspoň dve farby a
- každé tri vrcholy mnohouholníka určujú buď trojicu úsečiek rovnakej farby, alebo trojicu úsečiek troch rôznych farieb.

Dokážte, že $f(n) \leqq (n-1)^2$, a že rovnosť v tejto nerovnosti nastáva pre nekonečne veľa hodnôt n. (*Slovinsko*)

I3. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, pričom strany AB a CD nie sú rovnobežné a $|AB| = |CD|$. Stredy uhlopriečok AC a BD označme E a F. Priamka EF pretína úsečky AB, CD postupne v bodoch G, H. Dokážte, že $|\measuredangle AGH| = |\measuredangle DHG|$. (*Maďarsko*)

I4. Nájdite všetky celé čísla $k \geqq 2$ také, že číslo $n^{n-1} - m^{m-1}$ nie je deliteľné číslom k pre žiadnu dvojicu (m, n) rôznych kladných celých čísel menších alebo rovných k. (*Švajčiarsko*)

Súťaž družstiev:

T1. Reálne čísla x, y, z spĺňajú podmienku $x^2+y^2+z^2+9 = 4(x+y+z)$. Dokážte, že

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16(x^2 + y^2 + z^2) \geqq 8(x^3 + y^3 + z^3) + 27$$

a zistite, kedy v nerovnosti platí rovnosť. (*Slovensko, Ján Mazák*)

T2. Dané sú reálne čísla a, b, c, pričom ku každým dvom rovniciam spomedzi

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + cx + a = 0$$

existuje práve jedno reálne číslo, ktoré je riešením obidvoch. Určte všetky možné hodnoty výrazu $a^2 + b^2 + c^2$. (*Slovensko, Pavel Novotný*)

T3. Na tabuli sú napísané čísla $0, 1, 2, \ldots, n$, pričom $n \geqq 2$. V každom kroku zotrieme číslo, ktoré je aritmetickým priemerom dvoch rôznych čísel, ktoré ešte na tabuli zostali. Také kroky robíme až do momentu, keď už nemôžeme zotrieť žiadne číslo. Označme

$g(n)$ najmenší možný počet čísel, ktoré môžu na konci zostať na tabuli. Určte $g(n)$ pre každé n. (*Poľsko*)

T4. Každé políčko hracej plochy rozmerov 2009×2009 ofarbíme jednou z n farieb (nemusíme použiť všetky farby). Hovoríme, že daná farba je *súvislá*, ak má na celej ploche takú farbu iba jedno políčko, alebo ak pre ľubovoľné dve políčka tejto farby môže šachová dáma prejsť z jedného na druhé, pričom nikdy nezastaví na políčku inej farby (šachová dáma sa vie pohybovať vodorovne, zvisle a diagonálne). Nájdite najväčšie také n, že pre ľubovoľné ofarbenie hracej plochy je aspoň jedna *použitá* farba súvislá. (*Poľsko*)

T5. V rovnobežníku $ABCD$, v ktorom $|\measuredangle BAD| = 60°$, označme E priesečník uhlopriečok. Kružnica opísaná trojuholníku ACD pretína priamku BA v bode $K \neq A$, priamku BD v $P \neq D$ a priamku BC v $L \neq C$. Priamka EP pretína kružnicu opísanú trojuholníku CEL v bodoch E a M. Dokážte, že trojuholníky KLM a CAP sú zhodné. (*Slovinsko*)

T6. Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$, pričom $|CD| = |DA|$. Body E, F ležia postupne na stranách AB, BC, pričom $|\measuredangle ADC| = 2|\measuredangle EDF|$. Úsečky DK a DM sú postupne výškou a ťažnicou trojuholníka DEF. Bod L je obrazom bodu K v stredovej súmernosti podľa bodu M. Dokážte, že priamky DM a BL sú rovnobežné. (*Poľsko*)

T7. Nájdite všetky dvojice celých čísel (m, n), ktoré sú riešením rovnice

$$(m+n)^4 = m^2n^2 + m^2 + n^2 + 6mn.$$

(*Chorvátsko*)

T8. Nájdite všetky riešenia rovnice

$$2^x + 2009 = 3^y 5^z$$

v obore celých nezáporných čísel. (*Litva*)