2007/2008
57. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh MEMO*

(*Súťaž sa konala 4. – 10. 9. 2008.*)

Súťaž jednotlivcov:

I1. Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť celých kladných čísel s nasledovnou vlastnosťou: pre každú štvoricu indexov (i,j,k,l), kde $1 \leqq i < j \leqq k < l$ a $i+l = j+k$, platí nerovnosť $a_i + a_l > a_j + a_k$. Určte najmenšiu možnú hodnotu čísla a_{2008}. (*Rakúsko*)

I2. Uvažujme šachovnicu $n \times n$, kde $n > 1$. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať $2n-2$ políčok tejto šachovnice tak, aby spojnica stredov žiadnych dvoch vybraných políčok nebola rovnobežná so žiadnou diagonálou šachovnice? (*Švajčiarsko*)

I3. Nech ABC je rovnoramenný trojuholník s ramenami AC a BC. Kružnica vpísaná tomuto trojuholníku sa dotýka strany AB v bode D a strany BC v bode E. Priamka rôzna od AE prechádza bodom A a pretína vpísanú kružnicu v bodoch F a G. Priamky EF a EG pretínajú priamku AB v bodoch K a L. Dokážte, že platí rovnosť $|DK| = |DL|$. (*Maďarsko*)

I4. Nájdite všetky také celé čísla k, že čísla $4n+1$ a $kn+1$ sú nesúdeliteľné pre každé celé číslo n. (*Maďarsko*)

Súťaž družstiev:

T1. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pre ktoré platí

$$xf(x+xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$$

pre všetky reálne čísla x, y. (*Švajčiarsko*)

T2. Na tabuli je napísaných n celých kladných čísel, pričom $n \geqq 2$. V jednom kroku vyberieme dve z napísaných čísel a každé z nich nahradíme ich súčtom. Určte všetky hodnoty n, pre ktoré môžeme z akejkoľvek začiatočnej n-tice prirodzených čísel po konečnom počte krokov dostať n-ticu rovnakých čísel. (*Slovensko, Peter Novotný*)

T3. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Bod E leží v opačnej polrovine s hraničnou priamkou AC ako bod B a D je vnútorný bod úsečky AE. Nech $|\measuredangle ADB| = |\measuredangle CDE|$, $|\measuredangle BAD| = |\measuredangle ECD|$ a $|\measuredangle ACB| = |\measuredangle EBA|$. Dokážte, že body B, C a E sú kolineárne. (*Slovinsko*)

T4. Nech súčet všetkých kladných deliteľov celého kladného čísla n je mocninou čísla 2. Dokážte, že aj počet týchto deliteľov je mocninou čísla 2. (*Česká rep.*)