62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z8*

1. *Súčin troch prirodzených čísel je* 600. *Keby sme jedného činiteľa zmenšili o* 10, *zmenšil by sa súčin o* 400. *Keby sme namiesto toho jedného činiteľa zväčšili o* 5, *zväčšil by sa súčin na dvojnásobok pôvodnej hodnoty. Ktoré tri prirodzené čísla majú túto vlastnosť?* (*L. Hozová*)

Nápad. Z každej oznamovacej vety v zadaní možno priamo určiť jedného činiteľa.

Riešenie. Pracujme najskôr s druhou vetou: zmenšením jedného činiteľa o 10 sa zmenší súčin o 400. Pritom 400 sú dve tretiny zo 600, teda číslo 10 musí byť dvoma tretinami zo zmenšovaného činiteľa. Tým je preto číslo 15.

Ďalej pracujme s treťou vetou: zväčšením jedného činiteľa o 5 sa zväčší súčin na dvojnásobok. Zväčšením o 5 sa teda tento činiteľ zväčší tiež na dvojnásobok. Činiteľ je preto 5.

Z prvej vety zadania vieme, že súčin všetkých činiteľov je 600, dva z nich uvádzame vyššie, tretí je $600 : 15 : 5 = 8$.

Informáciám zo zadania vyhovujú čísla 5, 8 a 15.

Iný nápad. Zadanie vedie na tri rovnice o troch neznámych.

Iné riešenie. Keďže zo zadania nie je jasné, či zmenšujeme/zväčšujeme vždy toho istého činiteľa alebo zakaždým iného, musíme prebrať obidve možnosti. V každom prípade hľadané prirodzené čísla označíme x, y a z.

1. Predpokladajme, že sa v zadaní hovorí o dvoch rôznych činiteľoch. V takom prípade môžeme informácie zo zadania prepísať nasledovne:

$$\begin{aligned} xyz &= 600,\\ (x-10)yz &= 200,\\ x(y+5)z &= 1\,200. \end{aligned}$$

Druhá rovnosť po roznásobení je $xyz - 10yz = 200$. Keďže $xyz = 600$, po úprave dostávame $10yz = 400$, t. j. $yz = 40$. Z rovnosti $xyz = 600$ teraz vyplýva $x \cdot 40 = 600$, t. j.

$$x = 15.$$

Podobne, tretia rovnosť po roznásobení je $xyz + 5xz = 1\,200$. Keďže $xyz = 600$, po úprave dostávame $5xz = 600$, t. j. $xz = 120$. Keďže už poznáme $x = 15$, musí byť

$$z = 8.$$

Dosadením opäť do rovnosti $xyz = 600$ máme $120y = 600$, odkiaľ vyplýva

$$y = 5.$$

2. Predpokladajme, že sa v zadaní hovorí dvakrát o rovnakom činiteľovi. V takom prípade môžeme písať:

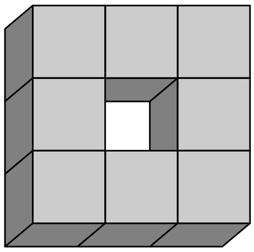
$$\begin{aligned} xyz &= 600,\\ (x-10)yz &= 200,\\ (x+5)yz &= 1\,200. \end{aligned}$$

Rovnako ako vyššie roznásobíme druhú, resp. tretiu rovnosť, dosadíme $xyz = 600$ a po úprave dostaneme $10yz = 400$, t. j. $yz = 40$, resp. $5yz = 600$, t. j. $yz = 120$. Keďže $40 \neq 120$, vidíme, že východiskový predpoklad nemôže byť splnený.

V zadaní sa hovorí o dvoch rôznych činiteľoch; uvažovanú vlastnosť majú práve tieto tri prirodzené čísla: 5, 8 a 15.

---

2. *Stano zložil 7 zhodných útvarov, každý zlepený z 8 rovnakých sivých kociek s hranou 1 cm tak ako na obr. 1.*



Obr. 1

Potom všetky ponoril do bielej farby a následne každý z útvarov rozobral na pôvodných 8 dielov, ktoré tak mali niektoré steny sivé a iné biele. Pridal k nim ešte 8 nových kociek, ktoré boli rovnaké ako ostatné, akurát celé biele. Zo všetkých kociek dokopy zložil jednu veľkú kocku a snažil sa pritom, aby čo najväčšia časť povrchu vzniknutej kocky bola sivá. Koľko cm^2 povrchu bude určite bielych? (*M. Mach*)

Nápad. Najskôr zistite, koľko ktorých kociek má Stano pred samotným skladaním k dispozícii.

Riešenie. Potrebujeme určiť, z akých kociek Stano skladal svoju veľkú kocku. Rohové kocky z rozložených obielených útvarov majú jednu dvojicu susedných stien sivú, zvyšok biely; celkom ich je $7 \cdot 4 = 28$. Ostatné kocky z týchto útvarov majú jednu dvojicu protiľahlých stien sivú, zvyšok biely; celkom ich je tiež $7 \cdot 4 = 28$. K týmto kockám sa ešte pridalo 8 celých bielych.

Stano mal k dispozícii celkom 64 kociek, skladal teda veľkú kocku s „hranou 4 malé kocky“ ($4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$). Teraz určíme počty kociek vo veľkej kocke podľa počtu viditeľných stien: Rohové kocky majú viditeľné tri steny; tých je celkom 8. Na hranách sú kocky s dvoma viditeľnými stenami; celkom ich je $12 \cdot 2 = 24$. V stenách sú kocky s jednou viditeľnou stenou; celkom ich je $6 \cdot 4 = 24$. Vnútri veľkej kocky je 8 kociek, ktoré nevidno vôbec.

Z rozrezaných útvarov Stano nezískal žiadne kocky, ktoré by mali 3 sivé steny. Zrejme teda celú sivú veľkú kocku zostaviť nemohol, napriek tomu, že celková sivá plocha na kockách je väčšia než povrch veľkej kocky. My samozrejme nevieme, ako Stano kocku skladal, nič menej, aby čo najväčšia časť povrchu bola sivá, mohol postupovať napr. takto:

- všetkých 8 čisto bielych kociek umiestni doprostred,
- 24 kociek so susednými sivými stenami použije na hrany veľkej kocky,
- zvyšné 4 kocky so susednými sivými stenami umiestni do niektorých vrcholov (týmto dostane na povrchu veľkej kocky 4 biele plôšky),
- 24 kociek s protiľahlými sivými stenami použije do stien veľkej kocky,

- zvyšné 4 kocky s protiľahlými sivými stenami umiestni do zvyšných vrcholov (na povrchu pribudne 8 bielych plôšok).

Pri tomto postupe by na povrchu veľkej kocky bolo 12 bielych plôšok, t. j. $12\,\mathrm{cm}^2$.

Aby bolo zrejmé, že lepšie už kocku zložiť nemožno, všimneme si nasledujúce skutočnosti: Žiadnu z kociek, ktoré majú protiľahlé steny sivé, nikdy nemôžeme vo veľkej kocke umiestniť tak, aby obe sivé steny bolo vidno – použitím všetkých týchto kociek možno teda obsiahnuť nanajvýš $28\,\mathrm{cm}^2$ sivej plochy na povrchu veľkej kocky. Naopak, kocky, ktoré majú susedné steny sivé, sa dajú umiestniť tak, aby obe sivé steny bolo vidno – použitím všetkých týchto kociek možno obsiahnuť nanajvýš $56\,\mathrm{cm}^2$ sivej plochy na povrchu veľkej kocky. Na povrchu veľkej kocky môže byť nanajvýš $28 + 56 = 84\,(\mathrm{cm}^2)$ sivej plochy. Povrch celej kocky je $6 \cdot 4 \cdot 4 = 96\,(\mathrm{cm}^2)$; na jej povrchu teda nemôže byť menej ako $96 - 84 = 12\,(\mathrm{cm}^2)$ bielych.

Predchádzajúci postup ukazuje jednu z možností, ako tento výsledok realizovať. Nech už Stano postupoval akokoľvek, $12\,\mathrm{cm}^2$ povrchu kocky bude určite bielych.

---

3. *Dedo zabudol štvorciferný kód svojho mobilu. Vedel len, že na prvom mieste nebola nula, že uprostred boli buď dve štvorky alebo dve sedmičky alebo tiež štvorka so sedmičkou (v neznámom poradí) a že sa jednalo o číslo deliteľné číslom* 15. *Koľko je možností pre zabudnutý kód? Aká cifra mohla byť na prvom mieste?* (*M. Volfová*)

Nápad. Začnite prostredným dvojčíslím, potom uvažujte ostatné podmienky zo zadania.

Riešenie. Prostredné dve miesta môžu byť obsadené práve štyrmi spôsobmi:

$$*44*,\ *77*,\ *47*,\ *74*\,.$$

Číslo je deliteľné 15 práve vtedy, keď je deliteľné tromi a zároveň piatimi. Pritom číslo je deliteľné piatimi práve vtedy, keď jeho posledná cifra je buď 0 alebo 5, a číslo je deliteľné tromi práve vtedy, keď jeho ciferný súčet je deliteľný tromi.

Ak je posledná cifra 0, tak uvažujeme nasledujúce možnosti

$$*440,\ *770,\ *470,\ *740$$

a hľadáme prvú cifru tak, aby ciferný súčet bol deliteľný tromi. Vo všetkých prípadoch vychádza tá istá možná trojica: 1, 4 alebo 7.

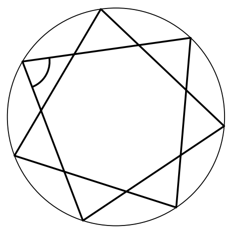
Ak je posledná cifra 5, tak uvažujeme podobne nasledujúce možnosti

$$*445,\ *775,\ *475,\ *745.$$

Vo všetkých prípadoch vychádza tá istá možná trojica: 2, 5 alebo 8.

Podmienkam zo zadania vyhovuje $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ možností. Na prvom mieste môže byť ktorákoľvek nenulová cifra okrem 3, 6 a 9.

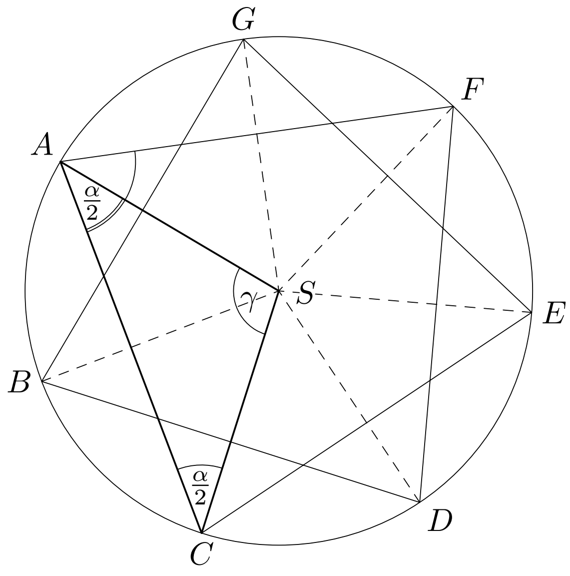
4. *Daná je pravidelná sedemcípa hviezda ako na obr. 2. Aká je veľkosť vyznačeného uhla?* (E. Pataková)



Obr. 2

Nápad. Hľadajte rovnoramenné trojuholníky, pri ktorých viete určiť veľkosti vnútorných uhlov.

Riešenie. Hľadaný uhol budeme nazývať α. Ďalej označme vrcholy a stred hviezdy ako na obr. 3. Ak spojíme všetky vrcholy so stredom S, vidíme veľa rovnoramenných trojuholníkov, z ktorých viaceré sú navzájom zhodné. Napr. trojuholníky ASC, BSD, $\ldots$, GSB sú zhodné: všetky tieto trojuholníky majú zhodné ramená a uhol pri vrchole S (ktorého veľkosť je rovná dvojnásobku veľkosti uhla ASB, t. j. $\gamma = 2 \cdot \frac{360^\circ}{7}$). Uhol α je preto rovný dvojnásobku uhla pri vrchole A v trojuholníku ASC. Keďže je tento trojuholník rovnoramenný, je uhol α rovnaký ako súčet vnútorných uhlov pri vrcholoch A a C.

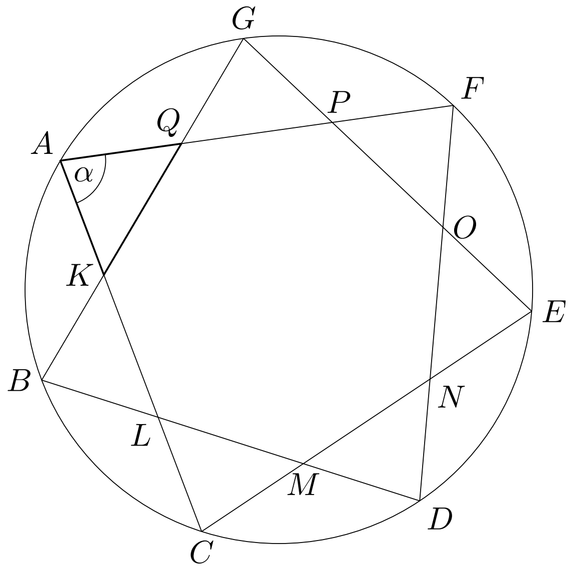


Obr. 3

Súčet veľkostí vnútorných uhlov v ľubovoľnom trojuholníku je 180°, preto platí $\alpha + \gamma = 180^\circ$, odkiaľ ľahko dopočítame veľkosť uhla α:

$$\alpha = 180^\circ - \frac{2}{7} \cdot 360^\circ = \left(1 - \frac{4}{7}\right) \cdot 180^\circ = \left(77\frac{1}{7}\right)^\circ \doteq 77^\circ 8' 34''.$$

Poznámka. Ak vieme (alebo zdôvodníme), že veľkosť vnútorného uhla v pravidelnom sedemuholníku je rovná $\frac{5}{7} \cdot 180^\circ$, tak môžeme úlohu doriešiť nasledovne (obr. 4).



Obr. 4

Vnútorné uhly pri vrcholoch K a Q v rovnoramennom trojuholníku KAQ sú vonkajšími uhlami pravidelného sedemuholníka $KLMNOPQ$; ich veľkosť je preto $180^\circ - \frac{5}{7}180^\circ = \frac{2}{7}180^\circ$. Súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku KAQ je $\alpha + \frac{4}{7}180^\circ = 180^\circ$, odkiaľ vyjadríme neznámu: $\alpha = \left(1 - \frac{4}{7}\right) \cdot 180^\circ = \ldots$

---

5. *Dňa 1. septembra 2007 bola založená jazyková škola, v ktorej vyučovalo sedem pedagógov. Dňa 1. septembra 2010 k týmto siedmim učiteľom pribudol nový kolega, ktorý mal práve 25 rokov. Do 1. septembra 2012 jeden z učiteľov zo školy odišiel, a tak ich zostalo opäť sedem. Priemerný vek pedagógov na škole bol vo všetkých troch spomenutých dátumoch rovnaký. Koľko rokov mal 1. septembra 2012 učiteľ, ktorý v škole už nepracoval? Aký bol v ten deň priemerný vek učiteľov na škole?* (*L. Šimůnek*)

Nápad. Pracujte so súčtom vekov všetkých zamestnaných učiteľov. Uvažujte, ako sa tento súčet mení vzhľadom na uvedený dátum.

Riešenie. Súčet vekov všetkých siedmich učiteľov školy 1. septembra 2007 označme c. Súčet vekov týchto siedmich ľudí sa do 1. septembra 2010 zväčšil o $7 \cdot 3 = 21$, súčet vekov všetkých ôsmich učiteľov pracujúcich v tento deň na škole bol teda

$$c + 21 + 25 = c + 46.$$

Súčet vekov týchto ôsmich ľudí sa do 1. septembra 2012 zväčšil o $8 \cdot 2 = 16$. V tento deň jeden z nich už na škole nepracoval, jeho vek v ten deň označíme x. Súčet vekov siedmich zvyšných učiteľov bol v tento deň rovný

$$c + 46 + 16 - x = c + 62 - x.$$

Keďže má byť priemerný vek učiteľov na škole vo všetkých spomenutých dátumoch rovnaký, platia rovnosti

$$\frac{c}{7} = \frac{c + 46}{8} = \frac{c + 62 - x}{7}.$$

Z rovnosti medzi prvým a tretím lomeným výrazom priamo vyplýva, že $x = 62$. Učiteľ, ktorý 1. septembra 2012 už na škole nepracoval, mal teda práve 62 rokov.

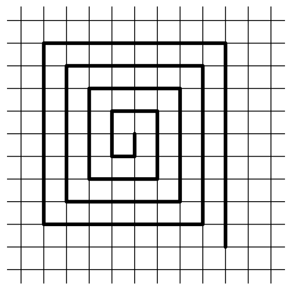
Úpravami rovnosti medzi prvými dvoma lomenými výrazmi odvodíme hodnotu c:

$$\frac{c}{7} = \frac{c+46}{8},$$
$$8c = 7c + 7 \cdot 46,$$
$$c = 322.$$

Priemerný vek učiteľov vo všetkých troch spomenutých dátumoch bol $322 : 7 = 46$ rokov.

---

6. *Anička a Hanka chodili v labyrinte po špirálovitej cestičke, ktorej začiatok je schematicky znázornený na obr. 5. Strana štvorčeka v štvorčekovej sieti má dĺžku 1 m a celá cestička od stredu bludiska až k východu je dlhá 210 m.*



Obr. 5

Dievčatá vyšli zo stredu bludiska, nikde sa nevracali a po čase každá zastavila v niektorom z rohov. Anička pritom prešla o 24 m viac ako Hanka. V ktorých rohoch mohli dievčatá stáť? Určte všetky riešenia. (*E. Novotná*)

Nápad. Najskôr určte dĺžky všetkých úsekov bludiska.

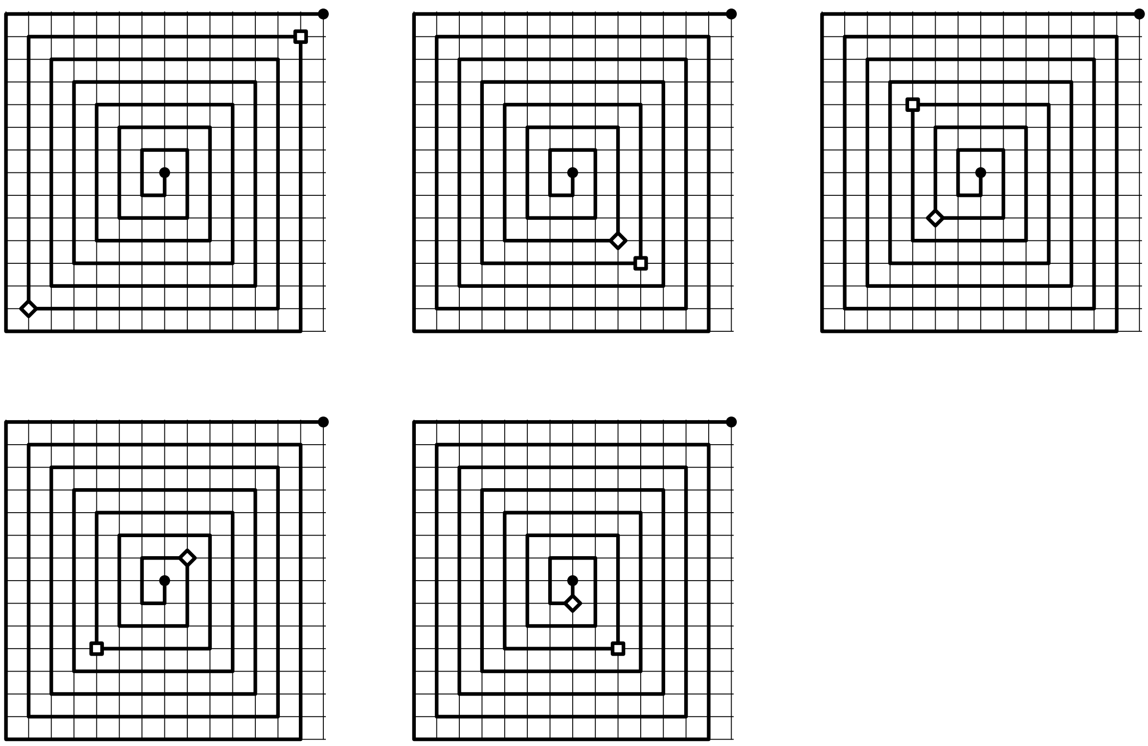
Riešenie. Zo zadania vidíme, že dĺžky jednotlivých úsekov bludiska sú postupne (počítané v metroch od stredu): 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, atď. Najskôr určíme, aké dlhé sú posledné úseky bludiska, aby celková dĺžka bola práve 210 m. Či už skúšaním, alebo nejakým pomocným výpočtom, celkom rýchlo zistíme, že bludisko pozostáva z nasledujúcich úsekov:

1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 14.

Anička prešla o 24 m viac ako Hanka; v uvedenej postupnosti preto hľadáme niekoľko po sebe idúcich čísel, ktorých súčet je 24. Aby bolo zrejmé, že sme nezabudli na žiadnu možnosť, budeme postupovať systematicky podľa počtu úsekov, ktoré delia Aničku od Hanky. Pre daný počet úsekov môžeme orientačne vyjadriť priemernú dĺžku jedného úseku. V blízkosti tejto hodnoty potom v našej postupnosti hľadáme zodpovedajúci počet po sebe idúcich čísel so súčtom 24. Výsledok nášho snaženia zhŕňa nasledujúca tabuľka:

počet úsekov	priemerná dĺžka	riešenie
1	24	–
2	12	12, 12
3	8	–
4	6	5, 6, 6, 7
5	4,8	4, 4, 5, 5, 6
6	4	3, 3, 4, 4, 5, 5
7	3,4	–
8	3	1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5

Posledné riešenie v tabuľke predstavuje prípad, keď Hanka prešla len 1 meter, teda najmenšiu možnú vzdialenosť. Preto nemá zmysel uvažovať 9 a viac úsekov. Úloha má päť riešení; dievčatá mohli stáť v rohoch ako na obr. 6.



Obr. 6

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Erika Novotná, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Erika Novotná, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012