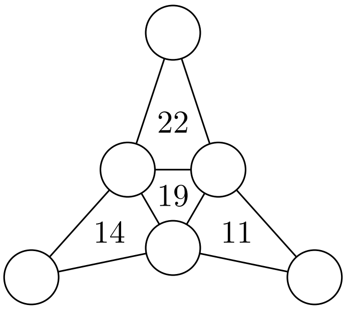
62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z7*

---

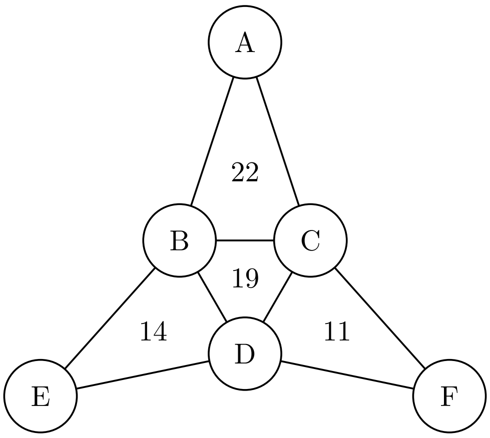
1. *Na obr. 1 je šesť krúžkov, ktoré tvoria vrcholy štyroch trojuholníkov. Napíšte do krúžkov navzájom rôzne jednociferné prirodzené čísla tak, aby v každom trojuholníku platilo, že číslo vnútri je súčtom čísel napísaných v jeho vrcholoch. Nájdite všetky riešenia.* (*E. Novotná*)



Obr. 1

Nápad. Všímajte si dvojice trojuholníkov so spoločnou stranou.

Riešenie. Označme čísla v krúžkoch ako na obr. 2. Budeme si postupne všímať dvojice trojuholníkov, ktoré majú spoločnú stranu.

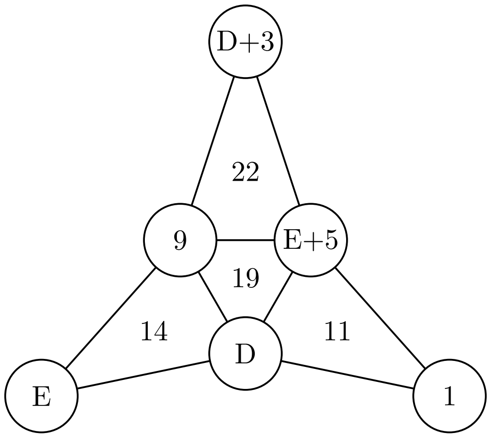


Obr. 2

Trojuholníky so spoločnou stranou DC: Keďže súčet čísel v trojuholníku DCB je 19 a súčet čísel v trojuholníku DCF je 11, musí byť číslo B o 8 väčšie ako číslo F. V krúžkoch môžu byť len prirodzené čísla od 1 po 9, máme teda jedinú možnosť: $B = 9$ a $F = 1$.

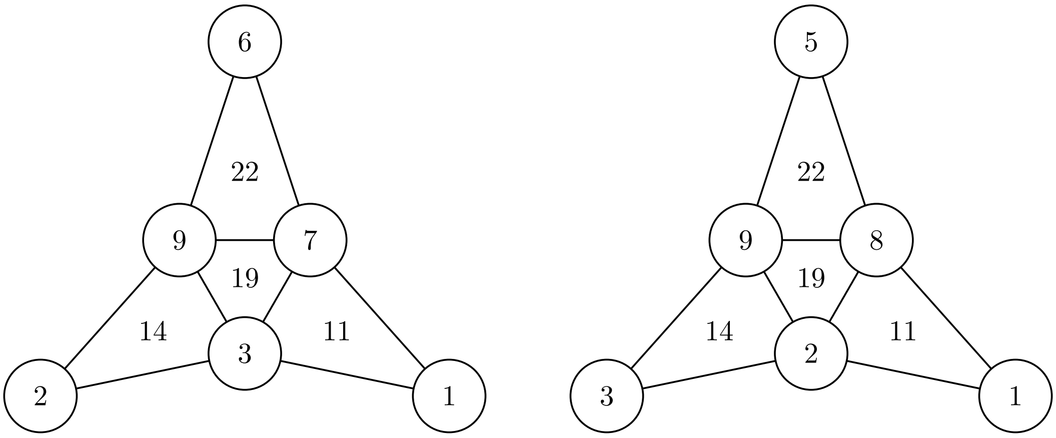
Keď porovnáme trojuholníky so spoločnou stranou CB, zistíme, že číslo A je o 3 väčšie ako číslo D. Túto dvojicu nevieme zatiaľ určiť jednoznačne, preto píšeme $A = D + 3$.

Podobne porovnaním trojuholníkov so spoločnou stranou BD určíme, že $C = E + 5$ (obr. 3).



Obr. 3

Z trojuholníka so súčtom čísel 19 teraz vidíme, že $9 + E + 5 + D = 19$, t. j. $E + D = 5$. Keďže číslo 1 sme už použili, musí byť $E = 2$ a $D = 3$, alebo naopak. Každá z dvoch uvedených možností vedie na jedno riešenie, ktoré vidíme na obr. 4. (V oboch prípadoch sú čísla v krúžkoch navzájom rôzne.)



Obr. 4

---

2. *Pred našou školou je kvetinový záhon. Jednu pätinu všetkých kvetov tvoria tulipány, dve deviatiny narcisy, štyri pätnástiny hyacinty a zvyšok sú sirôtky. Koľko kvetov je celkom na záhone, ak zo žiadneho druhu ich nie je viac ako 60 ani menej ako 30?*

(*M. Petrová*)

Nápad. Mohlo by byť na záhone napr. 100 kvetov?

Riešenie. Celkový počet kvetov musí byť deliteľný piatimi, pretože jednu pätinu tvoria tulipány. Z podobného dôvodu musí byť počet všetkých kvetov deliteľný deviatimi (kvôli narcisom) a pätnástimi (kvôli hyacintom). Počet všetkých kvetov na záhone je teda nejaký spoločný násobok čísel 5, 9 a 15. Najmenší spoločný násobok týchto troch čísel je 45, teda celkový počet kvetov je násobkom čísla 45.

V nasledujúcej tabuľke prechádzame postupne násobky 45 a určujeme zodpovedajúce počty jednotlivých druhov kvetov. Hľadáme taký riadok, kde sú všetky tieto počty v rozsahu od 30 do 60 (vrátane).

celkom (c)	tulipány ($t = \frac{1}{5}c$)	narcisy ($n = \frac{2}{9}c$)	hyacinty ($h = \frac{4}{15}c$)	sirôtky ($s = c - t - n - h$)
45	9	10	12	14
90	18	20	24	28
135	27	30	36	42
180	**36**	**40**	**48**	**56**
225	45	50	60	70

Jediný vyhovujúci prípad je zvýraznený vo štvrtom riadku. So zväčšujúcim sa celkovým počtom kvetov sa zväčšujú aj počty kvetov jednotlivých druhov, takže ďalšie (neuvedené) možnosti zrejme vyššie uvedeným požiadavkám nevyhovujú. Na záhone pred školou máme celkom 180 kvetov.

Poznámka. Akonáhle v riadku nájdeme číslo menšie ako 30 alebo väčšie ako 60, nemusíme ostatné položky dopočítavať – táto možnosť totiž určite nevyhovuje. Predošlá diskusia teda môže byť úplná, aj keď tabuľka je neúplná.

Iné riešenie. Najskôr dopočítame, akú časť medzi všetkými kvetmi tvoria sirôtky:

$$1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{9} - \frac{4}{15} = \frac{14}{45}.$$

Aby bol počet sirôtok prirodzeným číslom, musí byť počet všetkých kvetov násobkom čísla 45. V takom prípade sú aj počty ostatných kvetov prirodzené čísla.

Počty všetkých jednotlivých druhov sú v rozsahu od 30 do 60 (vrátane), odkiaľ vieme určiť rozsah celkového počtu kvetov:

Tulipány tvoria $\frac{1}{5}$ celkového počtu kvetov, takže počet všetkých kvetov musí byť

$$\text{od } 30 \cdot 5 = 150 \text{ do } 60 \cdot 5 = 300,$$

podľa pomerného zastúpenia narcisov musí byť počet všetkých kvetov

$$\text{od } 30 \cdot \frac{9}{2} = 135 \text{ do } 60 \cdot \frac{9}{2} = 270,$$

podľa hyacintov musí byť počet všetkých kvetov

$$\text{od } 30 \cdot \frac{15}{4} = 112,5 \text{ do } 60 \cdot \frac{15}{4} = 225$$

a podľa sirôtok

$$\text{od } 30 \cdot \frac{45}{14} \doteq 96{,}4 \text{ do } 60 \cdot \frac{45}{14} \doteq 192{,}9.$$

Predchádzajúce štyri podmienky majú platiť súčasne, teda celkový počet kvetov sa pohybuje v rozsahu od 150 do 192 (vrátane). Medzi týmito číslami je jediným násobkom 45 číslo 180. Na záhone rastie dokopy 180 kvetov.

3. *Obri Bartolomej a Koloman hovoria niektoré dni iba pravdu a niektoré dni iba klamú. Bartolomej hovorí pravdu iba cez víkendy, ostatné dni klame. Koloman hovorí pravdu v pondelok, v piatok a v nedeľu, ostatné dni klame.*

Jedného dňa Bartolomej povedal: „Včera sme obaja klamali."

Koloman však nesúhlasil: „Aspoň jeden z nás hovoril včera pravdu."

Ktorý deň v týždni môžu obri viesť takýto rozhovor? (*M. Volfová, V. Žádník*)

Nápad. Pomôžte si prehľadnou tabuľkou, z ktorej by bolo jasné, kedy ktorý obor klame a kedy nie.

Riešenie. Informácie zo zadania kvôli prehľadnosti vpíšeme do tabuľky:

	Bobr	Koloděj
pondelok	−	+
utorok	−	−
streda	−	−
štvrtok	−	−
piatok	−	+
sobota	+	−
nedeľa	+	+

Bartolomej môže tvrdiť „včera sme obaja klamali" buď v deň, keď hovorí pravdu a súčasne predošlý deň obaja obri klamali (čo sa stať nemôže), alebo v deň, keď klame a súčasne predošlý deň aspoň jeden z obrov hovoril pravdu (t. j. v pondelok alebo v utorok). Bartolomej teda môže povedať „včera sme obaja klamali" jedine v pondelok a v utorok.

Koloman môže tvrdiť „aspoň jeden z nás hovoril včera pravdu" buď v deň, keď hovorí pravdu a súčasne predošlý deň aspoň jeden z obrov hovoril pravdu (t. j. v pondelok alebo v nedeľu), alebo v deň, keď klame a súčasne predošlý deň žiadny z nich pravdu nehovoril (t. j. v stredu alebo vo štvrtok). Koloman teda môže povedať „aspoň jeden z nás hovoril včera pravdu" jedine v pondelok, v stredu, vo štvrtok a v nedeľu.

Teda jediný deň, keď môžu obri viesť uvedený rozhovor, je pondelok.

---

4. *Pani učiteľka napísala na tabuľu nasledujúce čísla:*

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22,\ 25,\ 28,\ 31,\ 34,\ 37,\ 40,\ 43.$$

Dve susedné čísla sa líšia vždy o rovnakú hodnotu, v tomto prípade o 3. *Potom z tabule zotrela všetky čísla okrem* 1, 19 *a* 43. *Ďalej medzi čísla* 1 *a* 43 *dopísala niekoľko celých čísel tak, že sa každé dve susedné čísla opäť líšili o rovnakú hodnotu a pritom žiadne číslo nebolo napísané viackrát. Koľkými spôsobmi mohla pani učiteľka čísla doplniť?* (*K. Pazourek*)

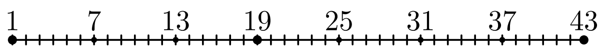
Nápad. Môže byť medzi doplnenými číslami napr. 5?

Riešenie. Jeden zo spôsobov, ako čísla doplniť, je samozrejme ten, ktorý pani učiteľka zotrela (v tomto prípade je rozdiel susedných čísel rovný 3). Ďalší možný, zrejme najjednoduchší, spôsob je doplniť všetky prirodzené čísla od 1 do 43 (v tomto prípade je rozdiel rovný 1).

Každé doplnenie podľa zadania je jednoznačne určené rozdielom susedných čísel, ktorý označíme d. Všetky možné doplnenia možno teda určiť skúšaním všetkých možných rozdielov d a kontrolou, či v zodpovedajúcej postupnosti (začínajúcej číslom 1) sú obsiahnuté aj čísla 19 a 43.

Avšak aby v takej postupnosti bolo číslo 19, musí byť rozdiel $19 - 1 = 18$ nejakým násobkom určujúcej konštanty d. Podobne, aby v takej postupnosti bolo aj číslo 43, musí byť rozdiel $43 - 19 = 24$ nejakým násobkom čísla d. Inými slovami, d musí byť spoločným deliteľom čísel 18 a 24. Všetky možné doplnenia teda zodpovedajú všetkým spoločným deliteľom čísel 18 a 24, čo sú práve čísla 1, 2, 3 a 6. Pani učiteľka mohla doplniť čísla na tabuľu štyrmi spôsobmi.

Poznámka. Predchádzajúce úvahy môžu byť vhodne podporené predstavou na číselnej osi; na obr. 5 je zvýraznené delenie s najväčším možným rozdielom $d = 6$.



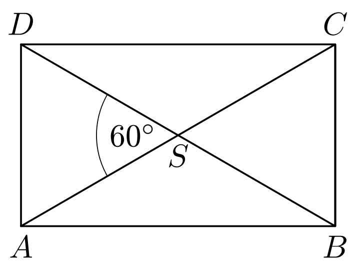
Obr. 5

---

5. *V športovom areáli je upravená plocha tvaru obdĺžnika $ABCD$ s dlhšou stranou AB. Uhlopriečky AC a BD zvierajú uhol $60°$. Bežci trénujú na veľkom okruhu $ACBDA$ alebo na malej dráhe ADA. Mojmír bežal desaťkrát po veľkom okruhu a Vojtech pätnásťkrát po malej dráhe, teda pätnásťkrát z A do D a pätnásťkrát z D do A. Dokopy ubehli celkom 4,5 km. Aká dlhá je uhlopriečka AC?* (L. Hozová)

Nápad. Je nejaký vzťah medzi dĺžkou uhlopriečky a dĺžkou kratšej strany obdĺžnika?

Riešenie. Priesečník uhlopriečok označíme S. Musíme rozhodnúť, či sa zadaná veľkosť $60°$ vzťahuje na uhol ASB alebo ASD. Keďže pre strany obdĺžnika platí $|AB| > |AD|$, musí byť uhol ASB tupouhlý a uhol ASD ostrouhlý. Veľkosť $60°$ teda prislúcha uhlu ASD (obr. 6).



Obr. 6

V každom obdĺžniku sú trojuholníky ASD a BSC rovnoramenné a navzájom zhodné, v našom prípade sú dokonca rovnostranné. To znamená, že úsečky AS, SC, CB, BS, SD a DA sú zhodné, ich dĺžku (v metroch) označíme s. Chceme určiť dĺžku uhlopriečky, ktorá pri súčasnom označení zodpovedá hodnote $2s$.

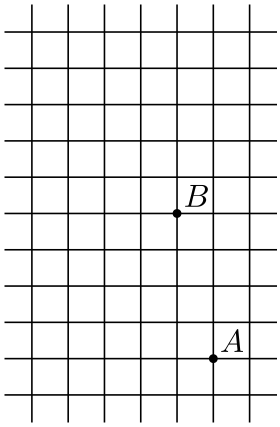
Dĺžka veľkého okruhu je teda $6s$ a celková vzdialenosť, ktorú ubehol Mojmír, je $10 \cdot 6s = 60s$. Dĺžka malej dráhy je $2s$ a celková vzdialenosť, ktorú ubehol Vojtech, je $15 \cdot 2s = 30s$. Obaja dokopy tak ubehli $60s + 30s = 90s$, čo je podľa zadania rovné $4{,}5\,\mathrm{km} = 4\,500\,\mathrm{m}$. Platí preto

$$90s = 4\,500,$$

odkiaľ vyplýva $2s = 100$. Dĺžka uhlopriečky je $100\,\mathrm{m}$.

---

6. *Máme štvorčekovú sieť so 77 mrežovými bodmi. Dva z nich sú označené A a B ako na obr. 7. Bod C nech je jeden zo zvyšných mrežových bodov. Nájdite všetky možné polohy bodu C tak, aby trojuholník ABC mal obsah 6 štvorčekov.* (*E. Novotná*)



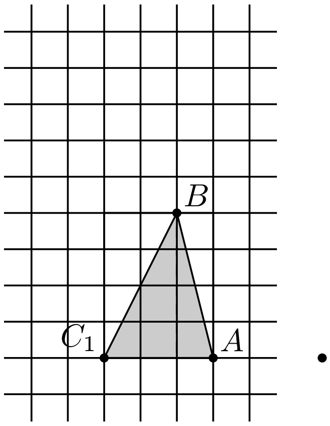
Obr. 7

Nápad. Skúšajte najskôr také body, aby niektorá strana trojuholníka ležala na nejakej priamke tvoriacej štvorčekovú sieť.

Riešenie. Ak hľadáme riešenie skúšaním, zväčša začneme skúšať mrežové body tak, ako naznačuje pomôcka. Uvažujme najskôr mrežové body na vodorovnej priamke prechádzajúcej bodom A; polohu bodu C počítame od A doľava:

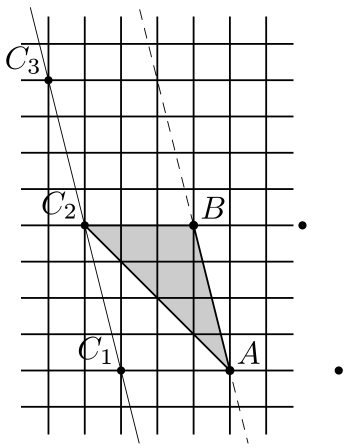
1. trojuholník je pravouhlý a jeho obsah je zrejme 2 štvorčeky, čo je málo,
2. výška z bodu B rozdeľuje trojuholník na dva (zhodné) pravouhlé trojuholníky, obsah je $2 + 2 = 4$ štvorčeky, čo je stále málo,
3. výška z bodu B rozdeľuje trojuholník na dva (nezhodné) pravouhlé trojuholníky, obsah je $4 + 2 = 6$ štvorčekov a máme prvé vyhovujúce riešenie, ktoré označíme C_1.

Tento bod možno nájsť aj bez skúšania, ak si včas uvedomíme, že obsah každého uvažovaného trojuholníka je rovný polovici obsahu pravouholníka, ktorého jedna strana je AC a druhá je rovná 4 jednotkám (veľkosť výšky z bodu B, poz. obr. 8). Hľadáme preto taký mrežový bod na myslenej priamke, aby obsah zodpovedajúceho pravouholníka bol rovný 12 štvorčekom. Bod C tak musí byť $12 : 4 = 3$ jednotky od A, a aby sme neopustili vyznačenú oblasť, musíme smerovať doľava.



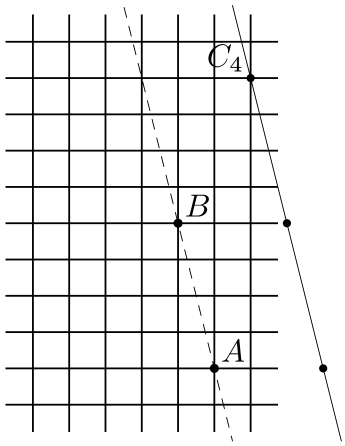
Obr. 8

Veľmi podobným spôsobom možno zdôvodniť aj ďalšie riešenie na vodorovnej priamke prechádzajúcej bodom B, ktoré označíme C_2. (Súmerný bod podľa B opäť vychádza mimo vyznačenú oblasť.) Priamka C_1C_2 je rovnobežná s AB, takže každý trojuholník ABC, ktorého vrchol C leží na tejto priamke, má tú istú výšku na stranu AB, teda aj ten istý obsah. Hľadáme teda také mrežové body, ktoré súčasne ležia na priamke C_1C_2. Takto nájdeme bod, ktorý je označený C_3 (obr. 9).



Obr. 9

Analogickou úvahou v opačnej polrovine ohraničenej priamkou AB zistíme, že zvyšné riešenia sú práve tie mrežové body, ktoré súčasne ležia na vyznačenej priamke na obr. 10. Takto nachádzame posledný vyhovujúci bod, ktorý je označený C_4.



Obr. 10

Úloha má spolu 4 riešenia, ktoré sme postupne označili C_1, C_2, C_3 a C_4.

Poznámky. V uvedenom riešení predpokladáme znalosť faktu, že obsah ľubovoľného trojuholníka je rovný polovici pravouholníka, ktorý má jednu stranu spoločnú s trojuholníkom a druhú zhodnú s výškou na túto stranu. Jednoduché zdôvodnenie tohto tvrdenia je v podstate ukázané v riešení úlohy Z6–I–2.

Aj bez tohto poznatku sa dá úloha doriešiť skúšaním, ako sme naznačili v úvode. Obsah ľubovoľného trojuholníka ABC s vrcholmi v mrežových bodoch sa dá vždy vyjadriť nasledovne:

- trojuholníku ABC opíšeme pravouholník, ktorého strany ležia na priamkach tvoriacich štvorčekovú sieť,
- ak je to nutné, rozdelíme doplnkové plochy k trojuholníku v opísanom pravouholníku na pravouhlé trojuholníky, príp. pravouholníky,
- obsah trojuholníka vyjadríme ako rozdiel obsahu opísaného pravouholníka a obsahov jednotlivých doplnkových častí z predchádzajúceho kroku.

Výpočet obsahov niektorých trojuholníkov by podľa tohto návodu vyzeral nasledovne (poz. predošlé obrázky):

$$
\begin{aligned}
S_{ABC_1} &= 3\cdot 4-\frac{2\cdot 4}{2}-\frac{1\cdot 4}{2}=12-6=6,\\
S_{ABC_2} &= 4\cdot 4-\frac{4\cdot 4}{2}-\frac{1\cdot 4}{2}=16-10=6,\\
S_{ABC_3} &= 5\cdot 8-\frac{5\cdot 8}{2}-\frac{4\cdot 4}{2}-1\cdot 4-\frac{1\cdot 4}{2}=40-34=6,\\
S_{ABC_4} &= 2\cdot 8-\frac{1\cdot 4}{2}-\frac{2\cdot 4}{2}-\frac{1\cdot 8}{2}=16-10=6.
\end{aligned}
$$

Všimnite si, že ani pri tomto postupe nie je nutné vyčerpávať všetky možnosti: ak máme napr. zistené, že bod C_2 je riešením, určite už nemusíme uvažovať také mrežové body, keď by zodpovedajúci trojuholník buď obsahoval trojuholník ABC_2 alebo bol jeho časťou (v prvom prípade by vzniknutý trojuholník mal väčší ako požadovaný obsah, v druhom prípade menší).

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Erika Novotná, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Erika Novotná, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012