62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z6*

---

1. *Ľuboš si myslí trojciferné prirodzené číslo, ktoré má všetky svoje cifry nepárne. Ak k nemu pripočíta* 421*, dostane trojciferné číslo, ktoré nemá ani jednu svoju cifru nepárnu. Nájdite všetky čísla, ktoré si môže Ľuboš myslieť.* (*L. Šimůnek*)

Nápad. Zapíšte si čísla pod seba a uvažujte ako pri písomnom sčítaní.

Riešenie. Cifry mysleného čísla označíme postupne N_1, N_2, N_3. Sčítanie uvedené v zadaní znázorňuje nasledujúca schéma:

$$\begin{array}{ccc} N_1 & N_2 & N_3 \\ 4 & 2 & 1 \\ \hline P_1 & P_2 & P_3 \end{array}$$

Pre každé nepárne N_3 je súčet N_3+1 párny. Avšak pre každé nepárne N_2 je súčet N_2+2 nepárny. Aby sme napriek tomu dostali vo výsledku v stĺpci desiatok párnu cifru, musí pri sčítaní v stĺpci jednotiek nastať prechod cez desiatku. Teda N_3 môže byť jedine 9.

Pre každé nepárne N_1 je súčet $N_1 + 4$ nepárny. Ak má byť napriek tomu vo výsledku v stĺpci stoviek párna cifra, musí pri sčítaní v stĺpci desiatok nastať prechod cez desiatku. Teda N_2 môže byť iba 9 a 7.

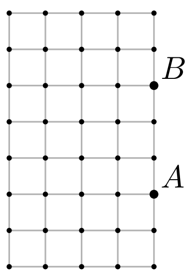
Pri sčítaní na mieste stoviek prechod cez desiatku nastať nesmie, pretože výsledok má byť podľa zadania trojciferný. Teda N_1 môže byt iba 1 alebo 3.

Zoskupením prípustných cifier dostávame celkom štyri čísla, ktoré si Ľuboš mohol myslieť:

$$179,\ 199,\ 379 \text{ a } 399.$$

---

2. *Na obr. 1 sú vyznačené mrežové body štvorčekovej siete, z ktorých dva sú pomenované A a B. Nech bod C je jeden zo zvyšných mrežových bodov. Nájdite všetky možné polohy bodu C tak, aby trojuholník ABC mal obsah 4,5 štvorčeka.* (*E. Novotná*)



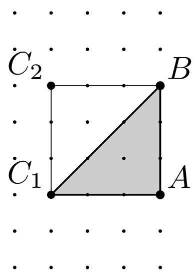
Obr. 1

Nápad. Obsah každého trojuholníka sa dá vyjadriť pomocou obsahu (nanajvýš) dvoch pravouhlých trojuholníkov.

Riešenie. Náhodným skúšaním mrežových bodov veľmi skoro zistíme, že potrebujeme rozobrať tri kvalitatívne odlišné prípady, keď trojuholník ABC je a) pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole A alebo B, b) ostrouhlý alebo c) tupouhlý.

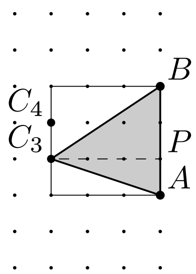
a) Predpokladajme, že trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole A alebo B. Budeme uvažovať prvú možnosť, riešenie v druhom prípade bude súmerné.

Taký trojuholník tvorí práve polovicu pravouholníka, ktorého jedna strana je AB a druhá AC. Obsah tohto pravouholníka má byť rovný 9 štvorčekom. Veľkosť AB je 3 jednotky, bod C teda musí byť $9 : 3 = 3$ jednotky od A. Tento bod označíme C_1, súmerné riešenie vľavo od bodu B je označené C_2 (obr. 2).



Obr. 2

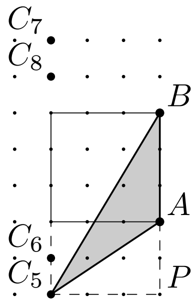
b) Predpokladajme teraz, že bod C je nejaký mrežový bod v páse medzi priamkami AC_1 a BC_2. Trojuholník ABC rozdelíme výškou na stranu AB na dva menšie pravouhlé trojuholníky. Každý z týchto trojuholníkov je polovicou nejakého pravouholníka, poz. obr. 3. Tieto dva pravouholníky tvoria väčší pravouholník, ktorého obsah je dvojnásobkom obsahu trojuholníka ABC. Jedna strana tohto pravouholníka je AB a druhá je zhodná s výškou CP. Hľadáme teda taký bod C, aby obsah takého pravouholníka bol 9 štvorčekov. Skúšaním alebo úvahou ako vyššie odhalíme dve riešenia, ktoré sú vyznačené ako C_3 a C_4.



Obr. 3

c) Nakoniec musíme rozobrať možnosti, keď bod C je nejaký mrežový bod mimo pásu určeného priamkami AC_1 a BC_2. Trojuholník ABC je v tomto prípade tupouhlý a výška na stranu AB ide mimo neho; pätu tejto výšky označíme opäť P. Budeme uvažovať len trojuholníky s tupým uhlom pri vrchole A, zvyšné riešenia sú súmerné.

Obsah trojuholníka ABC je teraz rozdielom obsahov pravouhlých trojuholníkov CPB a CPA. Každý z týchto trojuholníkov je polovicou vhodného pravouholníka (obr. 4). Rozdiel obsahov týchto pravouholníkov je teda dvojnásobkom obsahu trojuholníka ABC a je rovnaký ako obsah pravouholníka, ktorý je na obr. 4 obtiahnutý neprerušovanou čiarou. Jedna strana tohto pravouholníka je AB a druhá je zhodná s výškou CP. Hľadáme teda taký bod C, aby obsah takého pravouholníka bol 9 štvorčekov. Skúšaním alebo úvahou ako vyššie odhalíme dve riešenia, ktoré sú označené ako C_5 a C_6. Súmerné riešenia nad priamkou BC_2 sú C_7 a C_8.



Obr. 4

Úloha má spolu 8 riešení, ktoré sme postupne označili $C_1, \ldots, C_8$.

Poznámky. Predstava so súčtovým pravouholníkom v odseku b), resp. rozdielovým pravouholníkom v odseku c), nie je nutná na úspešné doriešenie úlohy. Stačí, keď si riešiteľ uvedomí, že obsah trojuholníka ABC je súčtom, resp. rozdielom, obsahov pravouhlých trojuholníkov CPB a CPA. Zdôvodnenie, že napr. vyznačený bod C_5 je riešením, potom môže vyzerať nasledovne:

$$S_{ABC_5} = \frac{3 \cdot 5}{2} - \frac{3 \cdot 2}{2} = \frac{9}{2}.$$

Všimnime si, že pre ľubovoľný bod C na priamke C_1C_2 vyjde podľa predošlých úvah obsah trojuholníka ABC tiež 4,5 štvorčeka. Vlastne sme tak dokázali, že obsah ľubovoľného trojuholníka je rovný polovici pravouholníka, ktorý má jednu stranu spoločnú s trojuholníkom a druhú zhodnú s výškou na túto stranu.

Pokiaľ žiak tento fakt už pozná, je riešenie obzvlášť jednoduché: stačí nájsť jeden vyhovujúci bod a všetky ostatné sú mrežové body ležiace na rovnobežke s priamkou AB, ktorá prechádza týmto vyhovujúcim bodom.

---

3. *Obri Koloman a Bartolomej hovoria niektoré dni iba pravdu a niekedy iba klamú. Koloman hovorí pravdu v pondelok, v piatok a v nedeľu, ostatné dni klame. Bartolomej hovorí pravdu v stredu, štvrtok a piatok, ostatné dni klame.*

1. *Určte, kedy môže Koloman povedať: „Včera som hovoril pravdu.“*
2. *Jedného dňa obaja povedali: „Včera som klamal.“ V ktorý deň to bolo?*

(*M. Volfová*)

Nápad. Pomôžte si prehľadnou tabuľkou, z ktorej bude jasné, kedy ktorý obor klame a kedy nie.

Riešenie. Informácie zo zadania kvôli prehľadnosti vpíšeme do tabuľky:

	Koloman	Bartolomej
pondelok	+	−
utorok	−	−
streda	−	+
štvrtok	−	+
piatok	+	+
sobota	−	−
nedeľa	+	−

1. Koloman určite môže povedať „včera som hovoril pravdu“ v pondelok, pretože v pondelok hovorí pravdu a v nedeľu (včera) tiež. Iná dvojica po sebe idúcich dní, počas ktorých hovorí pravdu, nie je. Ak by Koloman povedal zadaný výrok v deň, keď práve klame, znamenalo by to, že predošlý deň v skutočnosti klamal. To by sa mohlo stať jedine v stredu alebo vo štvrtok. Koloman teda môže tvrdiť „včera som hovoril pravdu“ v pondelok, v stredu a vo štvrtok.

2. Podobne, keď niektorý z obrov povie „včera som klamal“, môže to byť buď v deň, keď hovorí pravdu a súčasne predošlý deň klamal, alebo naopak. Koloman môže tento výrok prehlásiť v utorok, v piatok, v sobotu a v nedeľu; Bartolomej v stredu a v sobotu. Jediný deň, keď môžu obaja tvrdiť „včera som klamal“, je sobota.

---

4. *Eva má tri lístočky a na každom z nich je napísané jedno prirodzené číslo. Keď vynásobí medzi sebou všetky možné dvojice čísel z lístočkov, dostane výsledky* 48, 192 *a* 36. *Ktoré čísla sú napísané na Eviných lístočkoch?* (*E. Novotná*)

Nápad. Všimnite si, že $192 = 48 \cdot 4$.

Riešenie. Predpokladajme, že výsledok 48 dostaneme, keď vynásobíme čísla z prvého a druhého lístočka, výsledok 192 dostaneme z prvého a tretieho lístočka a výsledok 36 z druhého a tretieho lístočka.

Keďže $192 = 48 \cdot 4$, číslo na treťom lístočku musí byť štvornásobkom čísla na druhom lístočku. Na druhom lístočku je teda také číslo, že keď ho vynásobíme s jeho štvornásobkom, dostaneme 36. To znamená, že keby sme toto číslo vynásobili so sebou samým, dostali by sme štvrtinu predchádzajúceho výsledku, t. j. 9. Na druhom lístočku je teda číslo 3. Na treťom lístočku potom musí byť $3 \cdot 4 = 12$ a na prvom $48 : 3 = 16$. Na Eviných lístočkoch sú napísané tieto čísla: 16, 3 a 12.

Iný nápad. Každé prirodzené číslo sa dá napísať ako súčin dvoch prirodzených čísel iba konečne veľa spôsobmi.

Iné riešenie. Rovnako ako pri predošlom riešení predpokladáme, že výsledok 48 dostaneme vynásobením čísel z prvého a druhého lístočka, výsledok 192 dostaneme z prvého a tretieho lístočka a výsledok 36 z druhého a tretieho lístočka.

Číslo 36 môžeme napísať ako súčin dvoch prirodzených čísel iba piatimi spôsobmi:

$$36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6.$$

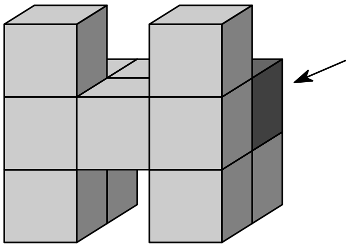
Pritom zo zadania vieme, že na treťom lístočku musí byť väčšie číslo ako na druhom lístočku (súčin čísel z prvého a tretieho lístočka je väčší ako súčin čísel z prvého a druhého). Odtiaľ máme iba štyri možné dvojice čísel na druhom a treťom lístočku. Zo známych hodnôt súčinov čísel na lístočkoch dopočítame dvojakým spôsobom číslo na prvom lístočku, a ak sa tieto výsledky budú zhodovať, nájdeme riešenie.

2. číslo (x)	3. číslo (y)	1. číslo ($48 : x$)	1. číslo ($192 : y$)
1	36	48	–
2	18	24	–
3	12	16	16
4	9	12	–

(Pomlčka označuje, že čísla nemožno deliť bezo zvyšku, t. j. výsledok nie je prirodzené číslo.) Vidíme jedinú vyhovujúcu možnosť: na Eviných lístočkoch sú napísané čísla 16, 3 a 12.

---

5. *Na obr. 5 je útvar zložený z dvanástich zhodných kociek. Na koľko rôznych miest môžeme premiestniť tmavú kocku (označenú šípkou), ak chceme, aby sa povrch zostaveného telesa nezmenil?*



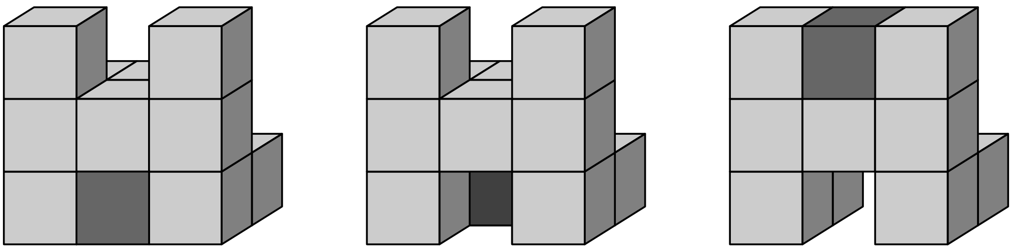
Obr. 5

Rovnako ako pri pôvodnom telese sa aj pri novom telese musia kocky dotýkať celými stenami. Poloha svetlých kociek sa meniť nemôže. (*D. Reichmann*)

Nápad. Ako sa zmení povrch telesa po odstránení tmavej kocky?

Riešenie. Pôvodne sú na povrchu zostaveného telesa tri steny tmavej kocky, ostatné tri jej steny sa dotýkajú svetlých kociek. Po odstránení tmavej kocky sa celkový povrch telesa nezmení (tri tmavé steny sa nahradia tromi svetlými).

Aby sa povrch telesa nezmenil ani po preložení tmavej kocky, musí sa táto dotýkať práve troch svetlých kociek (tri svetlé steny budú nahradené tromi tmavými). Skúšaním rýchlo zistíme, že tmavú kocku môžeme premiestniť jedine na tri miesta znázornené na obr. 6.



Obr. 6

---

6. *Obsluhujúci v bufete U Švindliara vždy započítava platiacemu hosťovi do účtu aj dátum: celkovú minutú sumu zväčší o toľko centov, koľký deň v mesiaci práve je. V septembri sa v bufete dvakrát zišla trojica priateľov. Prvýkrát platil každý z nich zvlášť, obsluhujúci teda vždy pripísal dátum a žiadal od každého 1,68 €. O štyri dni tam olovrantovali znova a dali si presne to isté čo minule. Tentoraz však jeden platil za všetkých dokopy. Obsluhujúci teda pripísal dátum do účtu iba raz a vypýtal si 4,86 €. Priateľom sa nezdalo, že aj keď sa ceny v jedálnom lístku nezmenili, majú olovrant lacnejší ako minule, a podvod odhalili. Koľkého septembra práve bolo, keď podvod odhalili?* (*L. Šimůnek*)

Nápad. Určte, aký by bol ich celkový účet, keby aj druhýkrát zaplatil každý zvlášť.

Riešenie. Keby v deň, keď priatelia odhalili čašníkov podvod, platil každý zvlášť, vypýtal by si čašník od každého $1{,}68 + 0{,}04 = 1{,}72$ (€). Celkom by tak zaplatili $3 \cdot 1{,}72 = 5{,}16$ (€). Tým, že platil jeden za všetkých, sa cena znížila o sumu zodpovedajúcu dvojnásobku dátumu. Táto cena je podľa zadania 4,86 €. Dvojnásobku dátumu teda zodpovedá suma $5{,}16 - 4{,}86 = 0{,}30$ (€). Číslo v dátume je $30 : 2 = 15$; priatelia podvod odhalili 15. septembra.

Poznámka. Svoj výsledok si môžeme overiť záverečným zhrnutím: Prvýkrát boli priatelia v bufete 11. septembra. Každý mal podľa jedálneho lístka platiť 1,57 €, platil však $1{,}57 + 0{,}11 = 1{,}68$ (€). Druhýkrát sa v bufete zišli 15. septembra. Jeden za všetkých mal podľa jedálneho lístka zaplatiť $3 \cdot 1{,}57 = 4{,}71$ (€), čašník si však vypýtal $4{,}71 + 0{,}15 = 4{,}86$ (€).

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Erika Novotná, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Erika Novotná, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012