62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh krajského kola kategórie B*

1. *Pre ľubovoľné reálne čísla $k \neq \pm 1$, $p \neq 0$ a q dokážte tvrdenie: Rovnica*

$$x^2 + px + q = 0$$

má v obore reálnych čísel dva korene, z ktorých jeden je k-násobkom druhého, práve vtedy, keď platí $kp^2 = (k+1)^2 q$. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Čísla x_1, x_2 sú koreňmi danej kvadratickej rovnice práve vtedy, keď platí

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{a} \quad x_1 x_2 = q. \tag{1}$$

Predpokladajme, že daná kvadratická rovnica má reálne korene $x_1 = \alpha$, $x_2 = k\alpha$. Dosadením do (1) dostaneme $(k+1)\alpha = -p$ a $k\alpha^2 = q$. Pre obe strany dokazovanej rovnosti $kp^2 = (k+1)^2 q$ odtiaľ vyplýva

$$kp^2 = k\bigl(-(k+1)\alpha\bigr)^2 = k(k+1)^2\alpha^2,$$
$$(k+1)^2 q = (k+1)^2 \cdot k\alpha^2 = k(k+1)^2\alpha^2,$$

teda daná rovnosť skutočne platí.

Nech naopak pre reálne čísla p, q a $k \neq -1$ platí $kp^2 = (k+1)^2 q$. Uvažujme dvojicu reálnych čísel

$$x_1 = \frac{-kp}{k+1} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{-p}{k+1}.$$

Také čísla (pre ktoré platí $x_1 = kx_2$) sú koreňmi danej kvadratickej rovnice, ak spĺňajú obe rovnosti (1). Overenie urobíme dosadením:

$$x_1 + x_2 = \frac{-kp}{k+1} + \frac{-p}{k+1} = \frac{-(k+1)p}{k+1} = -p,$$
$$x_1 x_2 = \frac{-kp}{k+1} \cdot \frac{-p}{k+1} = \frac{kp^2}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 q}{(k+1)^2} = q.$$

Tým je celý dôkaz hotový.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za zostavenie sústavy rovníc (1) spolu s podmienkou $x_2 = kx_1$. Ďalší 1 bod dajte za elimináciu niektorých premenných z tejto sústavy rovníc. Za dôkaz prvej implikácie potom dajte 2 body, za dôkaz opačnej implikácie tiež 2 body.

2. *Obec má 100 obyvateľov. Vieme, že každý z nich má v obci práve troch známych. (Známosti sú vzájomné.)*

a) Dokážte, že v obci existuje skupina 25 osôb, medzi ktorými sa žiadne dve nepoznajú.

b) Nájdite najmenšie prirodzené číslo n s vlastnosťou, že v ľubovoľnej skupine n osôb každej takej obce existuje dvojica známych.

(Ján Mazák)

Riešenie. a) Predpokladajme, že existuje skupina N majúca k osôb, v ktorej nie je dvojica známych. (Určite aspoň pre $k = 1$ taká skupina existuje.) Do skupiny O zaraďme všetky osoby, ktoré majú aspoň jedného známeho v skupine N. V skupine O je nanajvýš $3k$ osôb. V oboch skupinách O a N je teda dokopy nanajvýš $4k$ osôb. Preto v prípade $4k < 100$ ($k < 25$) môžeme v obci nájsť osobu, ktorá nepatrí do žiadnej zo skupín N a O. Ak ju pridáme do skupiny N, nebude v takto vytvorenej skupine žiadna dvojica známych a táto skupina bude mať $k+1$ osôb. Opakovaním tohto postupu tak získame skupinu aspoň 25 osôb, v ktorej neexistuje dvojica známych, čo dokazuje tvrdenie a).

b) Ukážeme, že skupina, v ktorej neexistuje dvojica známych, pozostáva nanajvýš z 50 osôb. Predpokladajme, že existuje skupina M majúca m osôb, v ktorej neexistuje dvojica známych. Každý človek zo skupiny M sa teda pozná s tromi osobami zo zvyšnej skupiny $100 - m$ osôb. To je spolu $3m$ známostí, čo nemôže byť viac, ako je celkový počet známostí ľudí zo skupiny mimo M, a ten je nanajvýš (niektorí sa môžu poznať navzájom) $3(100 - m)$, preto $3m \leqq 3(100 - m)$, čiže $m \leqq 50$, čo sme chceli dokázať.

V obci môžu existovať dokonca dve 50-členné skupiny, v ktorých sa nevyskytuje žiadna dvojica známych. Napr. keď sa osoba 1 pozná s osobami 51, 52, 53, osoba 2 sa pozná s osobami 52, 53 a 54, ..., osoba 48 sa pozná s osobami 98, 99 a 100, osoba 49 sa pozná s osobami 99, 100, 51 a osoba 50 sa pozná s osobami 100, 51, 52. Každá z osôb tak má troch známych a v skupinách osôb $1, 2, \ldots, 50$ a $51, 52, \ldots, 100$ neexistuje žiadna dvojica známych.

Číslo $n = 51$ je teda najmenším prirodzeným číslom s vlastnosťou, že v skupine n osôb, z ktorých každá má v obci so 100 obyvateľmi práve troch známych, vždy existuje dvojica známych.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za dôkaz časti a) dajte nanajvýš 2 body. Za časť b) dajte nanajvýš 4 body, z toho 2 body za konštrukciu prípadu, keď existuje skupina 50 osôb, z ktorých žiadne dve sa nepoznajú, 2 body za dôkaz, že v každej skupine 51 osôb možno nájsť dvojicu známych.

---

3. *Určte všetky trojice (a, b, c) celých kladných čísel, pre ktoré platí*

$$2^{a+2b+1} + 4^a + 16^b = 4^c.$$

(*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. Danú rovnicu môžeme prepísať ako

$$2^{a+2b+1} + 2^{2a} + 2^{4b} = 2^{2c}. \tag{1}$$

Označme $m = \min(a + 2b + 1, 2a, 4b)$. Ľavú stranu rovnice (1) tak môžeme zapísať v tvare

$$2^{a+2b+1} + 2^{2a} + 2^{4b} = 2^m(2^{a+2b+1-m} + 2^{2a-m} + 2^{4b-m}).$$

Pritom aspoň jeden z exponentov $(a+2b+1-m, 2a-m, 4b-m)$ je nulový a príslušná mocnina dvojky je tak rovná 1. Ak by zvyšné dva exponenty boli kladné, bolo by v zátvorke číslo nepárne, čo by znamenalo, že 2^{2c} je deliteľné nepárnym číslom väčším ako 1. Preto sú nulové aspoň dva z exponentov, takže v trojici $(a+2b+1, 2a, 4b)$ existujú dve rovnaké čísla, ktoré sú nanajvýš rovné tretiemu z nich.

Ak by bolo $a+2b+1 = 2a$, dostali by sme $a = 2b+1$, čo je v spore s predpokladanou nerovnosťou $2a \leqq 4b$. Podobne z rovnosti $a + 2b + 1 = 4b$ vyplýva $a = 2b - 1$, čo je v spore s nerovnosťou $4b \leqq 2a$. Nutne teda platí $2a = 4b$, t. j. $a = 2b$.

Ľavá strana danej rovnice tak má tvar

$$2^{a+2b+1} + 2^{2a} + 2^{4b} = 2^{4b+1} + 2^{4b} + 2^{4b} = 4 \cdot 2^{4b} = 2^{4b+2}.$$

Preto je rovnica splnená práve vtedy, keď $2c = 4b + 2$, čiže $c = 2b + 1$.

Pre ľubovoľné prirodzené číslo b je tak trojica $(a, b, c) = (2b, b, 2b + 1)$ riešením danej rovnice a žiadne iné riešenia neexistujú.

Iné riešenie. Ľavú stranu danej rovnice môžeme upraviť nasledujúcim spôsobom:

$$2^{a+2b+1} + 4^a + 16^b = 2 \cdot 2^a \cdot 4^b + (2^a)^2 + (4^b)^2 = (2^a + 4^b)^2.$$

Po odmocnení oboch strán tak dostaneme ekvivalentnú rovnicu

$$2^a + 4^b = 2^c, \qquad \text{čiže} \qquad 2^a + 2^{2b} = 2^c.$$

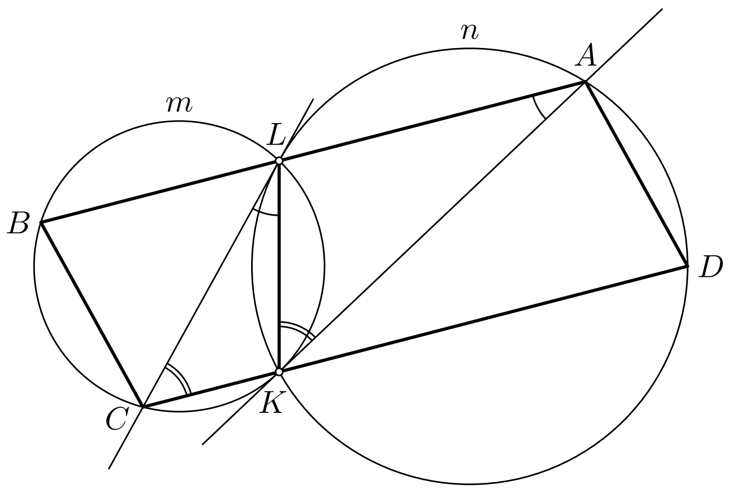
Z jednoznačnosti zápisu čísla v dvojkovej sústave alebo spôsobom podobným riešeniu úlohy B–I–1 potom môžeme zistiť, že $a = 2b$, odkiaľ vyplýva $c = 2b + 1$. Rovnako ako v predchádzajúcom riešení sme tak došli k záveru, že všetky riešenia rovnice sú tvaru $(a, b, c) = (2b, b, 2b + 1)$, pričom b je ľubovoľné prirodzené číslo.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Pri postupe ako v prvom riešení dajte 1 bod za vyjadrenie členov rovnice ako mocniny čísla 2, 2 body za dôkaz, že sa v trojici $(a + 2b + 1, 2a, 4b)$ musia dva členy sebe rovnať, 1 bod za dôkaz, že platí $2a = 4b$, za výpočet c a za uvedenie správnej odpovedi zvyšné 2 body. Pri druhom postupe dajte 3 body za vyjadrenie ľavej strany rovnice ako druhej mocniny, 2 body za úvahu vedúcu na rovnosť $a = 2b$ a 1 bod za dopočítanie c a správnu odpoveď.

---

4. *V rovine sú dané kružnice m, n, ktoré sa pretínajú v bodoch K, L. Dotyčnica v bode K ku kružnici m pretína kružnicu n v bode $A \neq K$, dotyčnica v bode L ku kružnici n pretína kružnicu m v bode $C \neq K$. Bod $B \neq L$ je priesečník priamky AL s kružnicou m a bod $D \neq K$ je priesečník priamky CK s kružnicou n. Dokážte, že štvoruholník $ABCD$ je rovnobežník.* (Pavel Leischner)

Riešenie. Obvodový uhol KAL a úsekový uhol CLK tetivy KL v kružnici n sú zhodné. Podobne sa zhodujú aj obvodový uhol KCL a úsekový uhol AKL tetivy KL v kružnici m (obr. 1). Trojuholníky AKL a LCK sa tak zhodujú v dvoch vnútorných uhloch, a preto sa zhodujú aj v treťom uhle. Uhly ALK a LKC sú teda zhodné, a preto sú zhodné aj ich doplnky do $180°$, ktorými sú obvodové uhly ADK, resp. LBC v uvažovaných kružniciach. Zhodnosť uhlov ALK a LKC dokazuje rovnobežnosť priamok AL a CK (teda priamok AB a CD), ktorá spolu so zhodnosťou uhlov ADK a LBC znamená, že aj priamky AD a BC sú rovnobežné. Štvoruholník $ABCD$ je teda rovnobežník, čo sme chceli dokázať.



Obr. 1

Poznámka. Akonáhle pomocou zhodných uhlov ALK a LKC zistíme, že priamky AB a CD sú rovnobežné, môžeme konštatovať, že oba tetivové štvoruholníky $ADLK$ a $BLKC$ sú buď pravouholníky, alebo rovnoramenné lichobežníky so zhodnými uhlami pri základniach. V oboch prípadoch to už zrejme zaručuje rovnobežnosť druhej dvojice priamok AD a BC.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Tvrdenia o rovnostiach dvojíc uhlov KAL, CLK a KCL, AKL oceňte po 1 bode, za dôkaz rovnobežnosti AB a CD dajte 2 body a za dôkaz rovnobežnosti AD a BC ďalšie 2 body.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Pavel Calábek, Karel Horák, Tomáš Jurík, Peter Novotný, Jaromír Šimša
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013