62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

---

1. *V tanečnej sa zišla skupina chlapcov a dievčat. Každý z prítomných 15 chlapcov pozná práve 4 dievčatá a každé dievča pozná práve 10 chlapcov. (Známosti sú vzájomné.) Dokážte, že ľubovoľní dvaja chlapci majú aspoň dve spoločné známe.* (Ján Mazák)

Riešenie. Do každej známosti vstupuje práve jeden chlapec a každý z chlapcov má práve štyri známosti, spolu teda v tanečnej existuje $15 \cdot 4 = 60$ známostí. V každej známosti je však zastúpené práve jedno dievča a každé dievča má práve desať známostí. Ak označíme d počet dievčat, tak $10 \cdot d = 60$. V tanečnej je teda 6 dievčat. Uvažujme ľubovoľného z chlapcov, povedzme Tomáša. Tomáš pozná 4 dievčatá, v tanečnej sú teda iba dve dievčatá, ktoré Tomáš nepozná. Ľubovoľný ďalší chlapec však pozná tiež štyri dievčatá, musí tak poznať aspoň dve z dievčat, ktoré pozná Tomáš.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Odvodenie celkového počtu známostí oceňte dvoma bodmi a určenie počtu dievčat ďalšími dvoma bodmi.

---

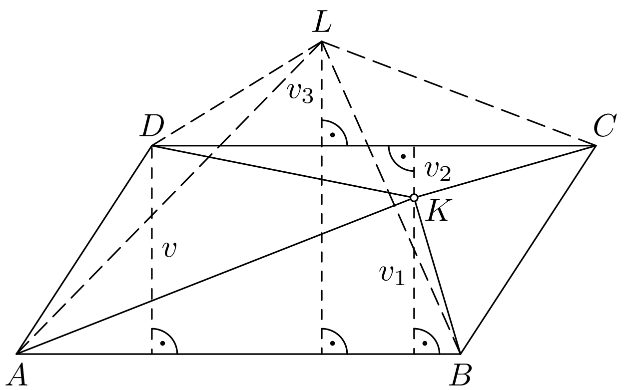
2. *Vnútri rovnobežníka $ABCD$ je daný bod K a v páse medzi rovnobežkami BC a AD v polrovine opačnej k CDA je daný bod L. Obsahy trojuholníkov ABK, BCK, DAK a DCL sú $S_{ABK} = 18\,\mathrm{cm}^2$, $S_{BCK} = 8\,\mathrm{cm}^2$, $S_{DAK} = 16\,\mathrm{cm}^2$, $S_{DCL} = 36\,\mathrm{cm}^2$. Vypočítajte obsahy trojuholníkov CDK a ABL.* (Pavel Novotný)

Riešenie. Trojuholníky ABK a CDK majú zhodné strany AB a CD a súčet ich výšok v_1 a v_2 (vzdialeností bodu K od priamky AB, resp. CD) je rovný výške v rovnobežníka $ABCD$ (vzdialenosti rovnobežných priamok AB a CD, obr. 1). Preto súčet ich obsahov dáva polovicu súčtu obsahu daného rovnobežníka:

$$S_{ABK} + S_{CDK} = \frac{1}{2}|AB|v_1 + \frac{1}{2}|CD|v_2 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v_1 + v_2) = \frac{1}{2}|AB| \cdot v = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Podobne aj $S_{BCK} + S_{DAK} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, teda

$$S_{CDK} = S_{BCK} + S_{DAK} - S_{ABK} = 6\,\mathrm{cm}^2.$$



Obr. 1

Trojuholníky ABL a DCL majú zhodné strany AB a CD. Ak v_3 označuje príslušnú výšku druhého z nich, je výška prvého z nich rovná $v + v_3$, takže pre rozdiel obsahov týchto trojuholníkov platí

$$S_{ABL} - S_{DCL} = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v + v_3) - \frac{1}{2}|CD| \cdot v_3 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v + v_3 - v_3) = \\ = \frac{1}{2}|AB| \cdot v = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{BCK} + S_{DAK}.$$

Odtiaľ vyplýva

$$S_{ABL} = S_{BCK} + S_{DAK} + S_{DCL} = 60\,\mathrm{cm}^2.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za určenie každého z obsahov dajte 3 body. Len za objavenie (a dôkaz) faktu, že súčet obsahov „protiľahlých“ trojuholníkov ABK a CDK či BCK a AKD dáva polovicu obsahu celého rovnobežníka, dajte 2 body.

---

3. *Nájdite všetky dvojice celých kladných čísel a a b, pre ktoré je číslo $a^2 + b$ o 62 väčšie ako číslo $b^2 + a$.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Zadanie zapíšeme rovnosťou, ktorej pravú stranu rovno upravíme na súčin:

$$62 = (a^2 + b) - (b^2 + a) = (a^2 - b^2) - (a - b) = (a - b)(a + b - 1).$$

Súčin celých čísel $u = a - b$ a $v = a + b - 1$ je teda rovný súčinu dvoch prvočísel $2 \cdot 31$. Keďže $v \geqq 1 + 1 - 1 = 1$, je nutne aj číslo u kladné a zrejme $u < v$, takže (u, v) je jedna z dvojíc $(1, 62)$ alebo $(2, 31)$. Ak vyjadríme naopak a, b pomocou u, v, dostaneme

$$a = \frac{u + v + 1}{2} \quad \text{a} \quad b = \frac{v - u + 1}{2}.$$

Pre $(u, v) = (1, 62)$ tak dostávame riešenie $(a, b) = (32, 31)$, dvojici $(u, v) = (2, 31)$ zodpovedá druhé riešenie $(a, b) = (17, 15)$. Iné riešenia úloha nemá.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za uhádnutie oboch riešení dajte 1 bod (t. j. iba za jedno uhádnuté riešenie žiadny bod). Za uvedený rozklad dajte 2 body, a ak si je riešiteľ vedomý toho, že mu stačí preskúmať iba konečne veľa možností, pridajte ďalší 1 bod.

---

4. *Určte najmenšie celé kladné číslo v, pre ktoré platí: Medzi ľubovoľnými v vrcholmi pravidelného dvadsaťuholníka možno nájsť tri, ktoré sú vrcholmi pravouhlého rovnoramenného trojuholníka.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Nech $A_1A_2 \ldots A_{20}$ je pravidelný dvadsaťuholník. Podľa Tálesovej vety jedine niektorý z desiatich priemerov A_1A_{11}, A_2A_{12}, $\ldots$, $A_{10}A_{20}$ opísanej kružnice môže byť preponou hľadaného pravouhlého trojuholníka, takže skúmané tvrdenie neplatí pre $v = 10$ (ani pre žiadne $v < 10$): stačí vybrať po jednom z vrcholov na rôznych priemeroch a nebude existovať žiadny pravouhlý trojuholník s takto vybranými vrcholmi.

V druhej časti riešenia ukážeme, že vyhovuje $v = 11$. Všetkých 20 vrcholov dvadsaťuholníka rozdelíme na päť štvoríc vrcholov štvorcov $A_1A_6A_{11}A_{16}$, $A_2A_7A_{12}A_{17}$, $A_3A_8A_{13}A_{18}$, $A_4A_9A_{14}A_{19}$ a $A_5A_{10}A_{15}A_{20}$. Ak teraz vyberieme ľubovoľne 11 vrcholov, budú vďaka nerovnosti $11 > 5 \cdot 2$ medzi vybranými aspoň tri vrcholy niektorého z piatich uvedených štvorcov (Dirichletov princíp). Ostáva dodať, že akékoľvek tri vrcholy štvorca zrejme tvoria pravouhlý rovnoramenný trojuholník.

Odpoveď. Hľadané najmenšie číslo v je rovné číslu 11.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za akýkoľvek správny protipríklad pre $v = 10$ a 4 body za dôkaz vlastnosti pre $v = 11$.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Karel Horák, Tomáš Jurík, Peter Novotný, Martin Panák, Jaromír Šimša
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013