2012/2013
62. ročník MO *Zadania úloh krajského kola kategórie B*

(*Súťaž sa konala v utorok 9. apríla 2013.*)

1. Pre ľubovoľné reálne čísla $k \neq \pm 1$, $p \neq 0$ a q dokážte tvrdenie: Rovnica

$$x^2 + px + q = 0$$

má v obore reálnych čísel dva korene, z ktorých jeden je k-násobkom druhého, práve vtedy, keď platí $kp^2 = (k+1)^2 q$. (*Jaromír Šimša*)

2. Obec má 100 obyvateľov. Vieme, že každý z nich má v obci práve troch známych. (Známosti sú vzájomné.)

a) Dokážte, že v obci existuje skupina 25 osôb, medzi ktorými sa žiadne dve nepoznajú.

b) Nájdite najmenšie prirodzené číslo n s vlastnosťou, že v ľubovoľnej skupine n osôb každej takej obce existuje dvojica známych.

(*Ján Mazák*)

3. Určte všetky trojice (a, b, c) celých kladných čísel, pre ktoré platí

$$2^{a+2b+1} + 4^a + 16^b = 4^c.$$

(*Jaroslav Švrček*)

4. V rovine sú dané kružnice m, n, ktoré sa pretínajú v bodoch K, L. Dotyčnica v bode K ku kružnici m pretína kružnicu n v bode $A \neq K$, dotyčnica v bode L ku kružnici n pretína kružnicu m v bode $C \neq K$. Bod $B \neq L$ je priesečník priamky AL s kružnicou m a bod $D \neq K$ je priesečník priamky CK s kružnicou n. Dokážte, že štvoruholník $ABCD$ je rovnobežník. (*Pavel Leischner*)