2006/2007
56. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh MEMO*

(*Súťaž sa konala 20. – 26. 9. 2007.*)

Súťaž jednotlivcov:

I1. Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla, pričom $a+b+c+d=4$. Dokážte, že

$$a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab \leqq 4.$$

(*Švajčiarsko*)

I2. Množina loptičiek obsahuje n loptičiek, ktoré sú označené číslami $1, 2, 3, \ldots, n$. Daných je $k>1$ takých množín. Chceme zafarbiť všetky loptičky dvoma farbami, čiernou a bielou, a to tak, aby

(*i*) loptičky označené rovnakým číslom mali rovnakú farbu,

(*ii*) každá množina $k+1$ loptičiek označených (nie nutne rôznymi) číslami $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$, ktoré spĺňajú podmienku $a_1+a_2+\ldots+a_k=a_{k+1}$, obsahovala z každej farby aspoň jednu loptičku.

V závislosti od k nájdite najväčšie možné číslo n, pre ktoré existuje takéto zafarbenie.

(*Slovinsko*)

I3. Nech k je kružnica a k_1, k_2, k_3, k_4 sú štyri menšie kružnice so stredmi O_1, O_2, O_3, O_4 ležiacimi na k. Pre $i=1,2,3,4$ a $k_5=k_1$ sa kružnice k_i a k_{i+1} pretínajú v bodoch A_i a B_i tak, že A_i leží na k. Body O_1, A_1, O_2, A_2, O_3, A_3, O_4, A_4 ležia v tomto poradí na k a sú navzájom rôzne. Dokážte, že $B_1B_2B_3B_4$ je pravouholník. (*Švajčiarsko*)

I4. Určte všetky dvojice (x, y) kladných celých čísel spĺňajúcich rovnosť

$$x!+y!=x^y.$$

(*Česká rep.*)

Súťaž družstiev:

T1. Nech a, b, c, d sú ľubovoľné reálne čísla z uzavretého intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, 2\right\rangle$ spĺňajúce $abcd=1$. Nájdite maximálnu hodnotu výrazu

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{d}\right)\left(d+\frac{1}{a}\right).$$

(*Česká rep.*)

T2. Pre ľubovoľnú množinu P piatich bodov v rovine vo všeobecnej polohe označíme $a(P)$ počet ostrouhlých trojuholníkov s vrcholmi v P (body sú vo všeobecnej polohe, ak sú navzájom rôzne a žiadne tri z nich neležia na jednej priamke). Určte najväčšiu možnú hodnotu $a(P)$. (*Švajčiarsko*)

T3. Nech $s(T)$ označuje súčet dĺžok hrán štvorstena T. Uvažujme štvorsteny s vlastnosťou, že dĺžky ich šiestich hrán sú navzájom rôzne kladné celé čísla, pričom jedno je 2 a jedno je 3. Nazvime ich MEMO-štvorstenmi.

a) Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré existuje MEMO-štvorsten T taký, že $s(T) = n$.

b) Koľko existuje navzájom nezhodných MEMO-štvorstenov T takých, že $s(T) = 2007$?

Dva štvorsteny sú nezhodné, ak jeden nemôže byť zobrazený na druhý pomocou súmerností podľa rovín, posunutí a otočení.
(Nie je potrebné dokázať, že štvorsteny uvažované v riešení sú nedegenerované, t. j. že majú nenulový objem.) (*Rakúsko*)

T4. Určte všetky kladné celé čísla k s nasledujúcou vlastnosťou: existuje celé číslo a také, že $(a+k)^3 - a^3$ je násobkom čísla 2007. (*Rakúsko*)