

**62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013**

Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z6

Informácia pre obvodnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideluje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skráteno len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

1. Pat napísal na tabuľu príklad:

$$589 + 544 + 80 = 2013.$$

Mat chcel príklad opraviť, aby sa obe strany naozaj rovnali, a pátral po neznámom čísle, ktoré potom k prvému sčítancu na ľavej strane pripočítal, od druhého sčítanca ho odčítal a tretieho sčítanca ním vynásobil. Po prevedení týchto operácií bol príklad vypočítaný správne. Aké číslo Mat našiel? (Libuše Hozová)

Riešenie. Pripočítaním neznámeho čísla k prvému sčítancu a odčítaním toho istého čísla od druhého sčítanca na ľavej strane sa súčet týchto dvoch čísel nezmení a je rovný $589 + 544 = 1133$. Tento čiastkový súčet je o $2013 - 1133 = 880$ menší ako číslo na pravej strane rovnosti. Preto súčin 80 a neznámeho Matovho čísla má byť rovný 880. Číslo, ktoré Mat našiel, bolo $880 : 80 = 11$.

Návrh hodnotenia. 2 body za zistenie, že prvé dve operácie nemajú na výsledok žiadny vplyv; 2 body za vyjadrenie rozdielu $2013 - 1133 = 880$ a vysvetlenie jeho významu; 2 body za vyjadrenie neznámeho čísla.

2. Lenka si myslí dve dvojciferné čísla. Jedno má obe cifry párne a druhé obe nepárne. Keď obe čísla sčíta, dostane opäť dvojciferné číslo, ktoré má prvú cifru párnu a druhú nepárnu. Navyše nám Lenka prezradila, že všetky tri dvojciferné čísla sú násobkami čísla tri a jedna z nepárnych cifier je 9. Aké čísla si mohla Lenka myslieť? Nájdite všetky možnosti. (Veronika Hucíková)

Riešenie. Súčet párneho a nepárneho čísla je vždy číslo nepárne. Avšak vo výslednom súčte je na mieste desiatok číslo párne, čo je možné jedine vtedy, keď súčet cifier na mieste jednotiek je väčší ako 10. Súčasne si uvedomujeme, že pre dva sčítance je tento súčet najviac 18.

Teraz zistíme, ktoré z nepárnych cifier môže byť 9:

- Ak by to bola druhá cifra vo výsledku, tak by súčet cifier na mieste jednotiek bol 19, čo je príliš veľa.
- Ak by to bola prvá cifra v jednom zo sčítancov, tak by tento sčítanec bol aspoň 91. Pritom sčítanec s párnymi ciframi je aspoň 20 (na mieste desiatok nemôže byť 0), takže výsledný súčet by nebol dvojciferný.

Ostáva jediná možnosť – 9 je druhá cifra v sčítanci s nepárnymi ciframi. Tu zatiaľ žiadny problém nevidíme, takže skúmame ďalej:

Sčítanec s nepárnymi ciframi môže byť

19, 39, 59, 79 alebo 99.

Z týchto čísel sú násobkom 3 iba čísla 39 a 99. Číslo 99 je však príliš veľké (pripočítaním akéhokoľvek čísla by sme dostali trojciferné číslo), takže Lenkino číslo s nepárnymi ciframi môže byť jedine 39.

Odtiaľ vidíme, že druhý sčítanec nesmie byť väčší ako 60 (aby súčet bol dvojciferný). Toto číslo má mať iba párne cifry a navyše z úvodného odseku vieme, že na mieste jednotiek musí byť aspoň 2. Sčítanec s párnymi ciframi teda môže byť

22, 24, 26, 28, 42, 44, 46 alebo 48.

Z týchto čísel sú násobkom 3 len čísla 24, 42 a 48. Spolu teda dostávame nasledujúce tri možnosti:

$$24 + 39 = 63, \quad 42 + 39 = 81, \quad 48 + 39 = 87.$$

Vo všetkých prípadoch sú splnené všetky podmienky zo zadania, takže Lenka si mohla myslieť ktorúkoľvek z uvedených dvojíc sčítancov.

Návrh hodnotenia. 1 bod za pozorovanie, že súčet cifier na mieste jednotiek je väčší ako 10; 2 body za určenie čísla 39 vrátane zdôvodnenia; 3 body za nájdenie sčítancov 24, 42 a 48 vrátane zdôvodnenia.

3. Štvoruholník $ABCD$ má nasledujúce vlastnosti:

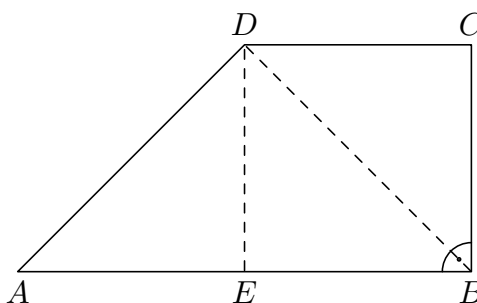
- strany AB a CD sú rovnobežné,
- pri vrchole B je pravý uhol,
- trojuholník ADB je rovnoramenný so základňou AB ,
- strany BC a CD sú dlhé 10 cm.

Určte obsah tohto štvoruholníka.

(Ján Mazák)

Riešenie. Obsah štvoruholníka $ABCD$ skúsime určiť ako súčet obsahov niekoľkých v ňom obsiahnutých trojuholníkov.

Keďže uhol ABC je pravý a priamky AB a CD sú rovnobežné, je aj uhol BCD pravý. Päť výšky v trojuholníku ABD z vrcholu D označíme E (obr. 1).



Obr. 1

Rovnoramenný trojuholník ABD je výškou DE rozdelený na dva zhodné trojuholníky. Navyše štvoruholník $BCDE$ je štvorec (je to pravouholník a $|BC| = |CD|$) a jeho uhlopriečka BD ho rozdeľuje na dva zhodné trojuholníky. Trojuholníky BCD , BED a AED sú teda navzájom zhodné a obsah každého z nich je rovný polovici obsahu štvorca $BCDE$, t. j.

$$\frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Obsah štvoruholníka $ABCD$ je rovný súčtu obsahov týchto troch trojuholníkov:

$$S_{ABCD} = 3 \cdot 50 = 150 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Návrh hodnotenia. 2 body za zdôvodnenie, že štvoruholník $BCDE$ je štvorec; 2 body za rozdelenie na zhodné trojuholníky; 2 body za vyjadrenie obsahu.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Erika Novotná, Marta Volfová, Vojtěch Žád-
ník

Recenzenti: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Miroslava Smit-
ková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Erika Novotná, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013