

62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013

Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z7

Informácia pre obvodnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideluje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skráteno len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

1. Dedo Vendelín išiel so svojimi dvoma vnukmi Cyrilom a Metodom kúpiť rybárske prúty a ďalšie potreby. Cena nákupu zaujala Cyrila aj deda. Islo o štvorciferné číslo, v ktorom prvá cifra bola o jedna väčšia ako tretia cifra, ale o jedna menšia ako posledná cifra. Súčet všetkých štyroch cifier bol 6. Cyril si ešte všimol, že dvojčíslenie zložené z prvých dvoch cifier predstavovalo dvojciferné číslo o 7 väčšie ako dvojčíslenie zložené z posledných dvoch cifier. Deda však zaujalo číslo preto, lebo bolo súčinom jeho veku a veku oboch vnukov, pritom každý z vnukov mal viac ako jeden rok. Koľko rokov mal dedo Vendelín a koľko jeho vnuci? (Libuše Hozová)

Riešenie. Číslo vyjadrujúce cenu rybárskych potrieb je štvorciferné, pritom prvá cifra je o jedna väčšia ako cifra tretia a o jedna menšia ako štvrtá. Uvedené tri cifry sú teda navzájom rôzne a súčet všetkých štyroch cifier má byť 6. Doteraz uvedeným podmienkam vyhovujú len čísla 2013 a 1302. Iba v prvom prípade však platí, že prvé dvojčíslenie predstavuje číslo o 7 väčšie ako druhé dvojčíslenie – cena potrieb teda bola 2013.

Vyjadriť 2013 ako súčin troch čísel, z ktorých žiadne nie je rovné jednej, možno len jediným spôsobom:

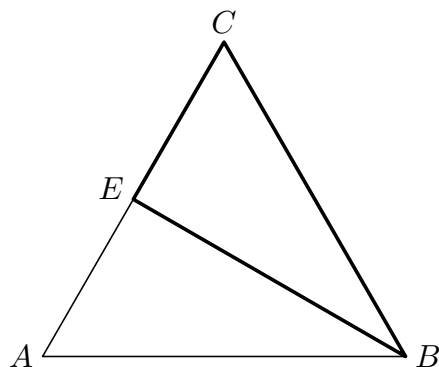
$$2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61.$$

Dedo Vendelín mal 61 rokov a jeho vnuci 3 a 11 rokov.

Návrh hodnotenia. 3 body za objavenie čísla 2013 vrátane zdôvodnenia; 3 body za rozklad čísla a odpoveď.

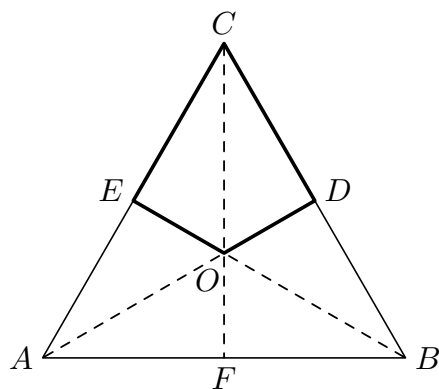
2. Petra má rovnostranný trojuholník ABC . Najskôr trojuholník prehla tak, aby bod A splynul s bodom C . Potom vzniknutý útvar prehla tak, že bod B splynul s bodom C . Tento útvar potom obkreslila na papier a zistila, že jeho obsah je 12 cm^2 . Určte obsah pôvodného trojuholníka. (Erika Novotná)

Riešenie. Po prvom prenutí splynul bod A s bodom C . Priamka, podľa ktorej sa prehýbalo, je osou úsečky AC , ktorá v rovnostrannom trojuholníku ABC prechádza bodom B . Po tomto prenutí dostala Petra trojuholník BEC , ktorý tvorí práve polovicu trojuholníka ABC (bod E je stredom úsečky AC , obr. 1).



Obr. 1

Po druhom prenutí splynul aj bod B s bodom C . Priamka, podľa ktorej sa prehýbalo, je osou úsečky BC , ktorá v pôvodnom trojuholníku prechádza bodom A . Po tomto prenutí dostala Petra štvoruholník $OECD$ (D je stredom úsečky BC a O je priesečník osí, obr. 2).



Obr. 2

Osi strán v rovnostrannom trojuholníku ABC sú osami súmernosti tohto trojuholníka. Odtiaľ vyplýva, že štvoruholníky $OECD$, $ODBF$ a $OFAE$ sú navzájom zhodné a každý z nich má obsah 12 cm^2 (F je stredom úsečky AB). Obsah trojuholníka ABC je rovný súčtu obsahov týchto troch štvoruholníkov:

$$S_{ABC} = 3 \cdot 12 = 36 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Návrh hodnotenia. 2 body za správnu interpretáciu prvého prehýbania (trojuholník BEC); 2 body za správnu interpretáciu druhého prehýbania (štvoruholník $OECD$); 2 body za vyjadrenie obsahu trojuholníka ABC .

3. Do skladu priviezli cement vo vreciach po 25 kg a po 40 kg. Menších vriec bolo dvakrát viac ako tých väčších. Skladník nahlásil vedúcemu počet všetkých privezených vriec, ale nespomenul, koľko je ktorých. Vedúci si myslel, že všetky vrecia vážia 25 kg. Nahlásený počet vriec teda vynásobil číslom 25 a výsledok zadokumentoval ako hmotnosť dodávky cementu. Cez noc zloději ukradli 60 väčších vriec, a tak na sklade ostalo presne toľko kg cementu, koľko vedúci zapísal. Koľko kg cementu ostalo? (Libor Šimůnek)

Riešenie. Zloději ukradli $60 \cdot 40 = 2\,400$ kg. Pred krádežou chýbalo v dokumentácii z každého veľkého vreca 15 kg. Celková nezapísaná hmotnosť sa rovná tej ukradnutej, veľkých vriec teda bolo dodaných

$$2\,400 : 15 = 160.$$

Malých vriec bolo dvakrát viac, t. j. 320; celkom dodávka obsahovala $160 + 320 = 480$ vriec. Vedúci zadokumentoval hmotnosť $480 \cdot 25 = 12\,000$ kg. Z dodaného cementu zvýšilo množstvo zodpovedajúce dokumentácii, teda 12 000 kg.

Návrh hodnotenia. 3 body za počet veľkých vriec pred krádežou; 3 body za hmotnosť zvyšného cementu.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Erika Novotná, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Erika Novotná, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013