62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z8*

<u>*Informácia pre obvodnú komisiu MO:*</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk*. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu* skmo@skmo.sk *v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke* skmo.sk/dokument.php?id=429 *nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.*

1. *Júlia má na papieri napísané štvorciferné číslo. Keď vymení cifry na mieste stoviek a jednotiek a sčíta toto nové číslo s číslom pôvodným, dostane výsledok* 3 332. *Keby však vymenila cifry na mieste tisícok a desiatok a sčítala by toto číslo s pôvodným, dostala by výsledok* 7 886. *Zistite, aké číslo mala Júlia napísané na papieri.* (Erika Novotná)

Riešenie. Cifry v Júliinom čísle označíme a, b, c, d. Potom informácie zo zadania môžeme zapísať takto:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a & d & c & b \\ \hline 3 & 3 & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ c & b & a & d \\ \hline 7 & 8 & 8 & 6 \end{array}$$

Z prvého súčtu vyplýva, že $a = 1$ (keby $a = 0$, tak by hľadané číslo nebolo štvorciferné, keby $a \geqq 2$, tak by súčet bol väčší ako 4 000). Dosadíme do predchádzajúceho vyjadrenia a podobne budeme postupovať ďalej:

$$\begin{array}{cccc} 1 & b & c & d \\ 1 & d & c & b \\ \hline 3 & 3 & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & b & c & d \\ c & b & 1 & d \\ \hline 7 & 8 & 8 & 6 \end{array}$$

Z prvého stĺpca v druhom súčte vyplýva, že c je 5 alebo 6. Z tretieho stĺpca toho istého súčtu vyplýva, že c je 6 alebo 7. Preto musí byť $c = 6$. Dosadíme do tretieho stĺpca a vidíme, že v tomto stĺpci sa do výsledku prenáša jednotka z posledného stĺpca. To znamená, že $d + d = 16$, čiže $d = 8$. Po dosadení dostávame:

$$\begin{array}{cccc} 1 & b & 6 & 8 \\ 1 & 8 & 6 & b \\ \hline 3 & 3 & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & b & 6 & 8 \\ 6 & b & 1 & 8 \\ \hline 7 & 8 & 8 & 6 \end{array}$$

Teraz napr. z posledného stĺpca v prvom súčte vyvodíme, že $b = 4$. Tým sme určili všetky neznáme, dosadíme za b na ostatných miestach a urobíme skúšku správnosti:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 8 & 6 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 6 & 8 \\ 6 & 4 & 1 & 8 \\ \hline 7 & 8 & 8 & 6 \end{array}$$

Keďže všetko vychádza, vieme, že Júlia mala na papieri číslo 1 468.

Návrh hodnotenia. 1 bod za formuláciu problému pomocou neznámych; po 1 bode za určenie každej neznámej; 1 bod za skúšku.

---

2. *Pán Zeler mal na záhradke dve rovnaké nádrže tvaru štvorbokého hranola so štvorcovým dnom, v oboch dokopy mal 300 litrov vody. V prvej nádrži tvorila voda presnú kocku a vyplnila 62,5 % nádrže, v druhej nádrži bolo vody o 50 litrov viac. Aké rozmery mali nádrže pána Zelera?* (*Libuše Hozová*)

Riešenie. Dĺžku hrany štvorcovej podstavy označíme a a výšku hranola v. Obe veličiny vyjadrujeme v dm; objem nádrže v litroch je rovný $V = a^2 \cdot v$. Objem vody v prvej nádrži bol a^3, v druhej nádrži $a^3 + 50$ a dokopy 300. Platí teda

$$a^3 + (a^3 + 50) = 300,$$

odkiaľ ľahko vyjadríme $a^3 = 125$ a $a = 5\,(\mathrm{dm})$.

V prvej nádrži teda bolo 125 litrov vody, čo predstavovalo 62,5 % celkového objemu V. Platí preto

$$125 = \frac{62{,}5}{100} \cdot V,$$

odkiaľ vyjadríme $V = 125 \cdot \frac{100}{62{,}5} = 2 \cdot 100 = 200\,(\mathrm{dm}^3)$. Zo vzťahu $V = a^2 \cdot v$ teraz dopočítame poslednú neznámu:

$$v = \frac{V}{a^2} = \frac{200}{25} = 8\,(\mathrm{dm}).$$

Rozmery každej z nádrží boli $5\,\mathrm{dm} \times 5\,\mathrm{dm} \times 8\,\mathrm{dm}$.

Návrh hodnotenia. 2 body za vyjadrenie hrany podstavy; 2 body za vyjadrenie objemu nádrže; 2 body za vyjadrenie výšky.

---

3. *Šifrovacej hry sa zúčastnilo 168 hráčov v 50 tímoch, ktoré mali dva až päť členov. Najviac bolo štvorčlenných tímov, trojčlenných tímov bolo 20 a hry sa zúčastnil aspoň jeden päťčlenný tím. Koľko bolo dvojčlenných, štvorčlenných a päťčlenných tímov?* (*Martin Mach*)

Riešenie. Hry sa zúčastnilo 20 trojčlenných tímov, čo predstavuje 60 hráčov. Zvyšných 108 hráčov z celkového počtu chceme rozdeliť do 30 tímov po dvoch, štyroch a piatich hráčoch.

Štvorčlenných tímov bolo najviac, t. j. minimálne 21, čo predstavuje minimálne 84 hráčov. Zvyšných 24 hráčov potrebujeme rozdeliť do 9 tímov po dvoch, štyroch a piatich hráčoch.

Päťčlenný tím bol aspoň jeden. Navyše z 24 hráčov možno zostaviť nanajvýš štyri päťčlenné tímy. Teraz preberieme všetky prípady, ktoré môžu nastať:

- Ak by päťčlenný tím bol práve 1, tak ostáva rozdeliť 19 hráčov do 8 tímov po dvoch a štyroch hráčoch. To však nie je možné, pretože 19 je nepárne číslo.
- Ak by päťčlenné tímy boli 2, tak ostáva rozdeliť 14 hráčov do 7 tímov po dvoch a štyroch hráčoch. To sa dá realizovať len jediným spôsobom – všetci títo hráči budú v dvojčlenných tímoch a žiadny ďalší štvorčlenný tím sa nevytvorí.
- Ak by päťčlenné tímy boli 3, tak ostáva rozdeliť 9 hráčov do 6 tímov po dvoch a štyroch hráčoch. To však nie je možné, pretože na 6 tímov treba aspoň 12 hráčov.
- Ak by päťčlenné tímy boli 4, tak ostáva rozdeliť 4 hráčov do 5 tímov po dvoch a štyroch hráčoch. To však nie je možné, pretože na 5 tímov treba aspoň 10 hráčov.

Z uvedenej diskusie vychádza jediná možnosť – hry sa zúčastnilo 7 dvojčlenných, 20 trojčlenných, 21 štvorčlenných tímov a 2 päťčlenné tímy.

Návrh hodnotenia. 2 body za úvahu, že stačí rozdeliť 24 hráčov do 9 tímov po 2, 4 a 5 hráčoch; 3 body za zdôvodnenie toho, že päťčlenné tímy mohli byť jedine dva; 1 bod za správny výsledok.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Erika Novotná, Marta Volfová, Vojtěch Žádník
Recenzenti:	Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Erika Novotná, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013