2008/2009
58. ročník MO *Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

1. *Označme $\mathbb{R}^+$ množinu všetkých kladných reálnych čísel. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ktoré pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}^+$ spĺňajú podmienku*

$$\bigl(1 + yf(x)\bigr)\bigl(1 - yf(x+y)\bigr) = 1.$$

(*František Kardoš*)

Riešenie. Postupnými úpravami zadanej podmienky dostávame

$$\begin{aligned} 1 + yf(x) - yf(x+y) - y^2 f(x)f(x+y) &= 1,\\ yf(x) - yf(x+y) &= y^2 f(x)f(x+y). \end{aligned}$$

Poslednú rovnosť môžeme vydeliť hodnotou $y \neq 0$. Pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}^+$ tak po ďalších úpravách (všetky výrazy, ktorými budeme deliť, sú evidentne nenulové) dostaneme

$$\begin{aligned} f(x) - f(x+y) &= yf(x)f(x+y),\\ f(x+y) &= \frac{f(x)}{1 + yf(x)},\\ \frac{1}{f(x+y)} &= y + \frac{1}{f(x)}, \end{aligned}$$

a teda aj

$$\frac{1}{f(y+x)} = x + \frac{1}{f(y)}.$$

Odtiaľ

$$y + \frac{1}{f(x)} = x + \frac{1}{f(y)}$$

pre všetky kladné x, y. Dosadením $y = 1$ dostaneme

$$\frac{1}{f(x)} = x + \frac{1}{f(1)} - 1 = x + c, \qquad \text{teda} \qquad f(x) = \frac{1}{x+c},$$

kde c je konštanta. Keďže $f(x) > 0$ pre každé $x > 0$, musí byť $x + c > 0$ pre každé $x > 0$, čiže $c \geqq 0$.

Ľahko overíme, že každá funkcia $f(x) = 1/(x+c)$, kde $c \geqq 0$, vyhovuje:

$$\left(1 + \frac{y}{x+c}\right)\left(1 - \frac{y}{x+y+c}\right) = \frac{x+c+y}{x+c} \cdot \frac{x+y+c-y}{x+y+c} = 1.$$

Iné riešenie. Dosaďme do zadanej podmienky $x = 1$ a $f(1) = a > 0$. Úpravou dostávame

$$\begin{aligned} (1 + ay)\bigl(1 - yf(y+1)\bigr) &= 1,\\ ay - yf(y+1)(1 + ay) &= 0,\\ f(y+1) &= \frac{a}{1+ay}. \end{aligned}$$

Keď teraz opäť do zadanej podmienky dosadíme $y = 1$ a $f(x+1) = a/(1+ax)$, máme

$$\begin{aligned}
\bigl(1 + f(x)\bigr)\left(1 - \frac{a}{1+ax}\right) &= 1,\\
f(x) \cdot \frac{1+ax-a}{1+ax} &= \frac{a}{1+ax},\\
f(x) &= \frac{a}{1+ax-a} = \frac{1}{x+\frac{1}{a}-1} = \frac{1}{x+c}.
\end{aligned}$$

Podobne ako v prvom riešení musí byť $c \geqq 0$ a ľahko overíme, že každá taká funkcia vyhovuje.

Poznámka. Riešenie možno zapísať aj v tvare

$$f(x) = \frac{a}{1+(x-1)a},$$

kde $a = f(1) \in (0,1\rangle$ je reálny parameter. Dá sa očakávať, že viaceré súťažné riešenia budú zapísané práve takto.

---

2. *Pre dané kladné celé čísla a, k je postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *definovaná vzťahmi*

$$a_1 = a \qquad \text{a} \qquad a_{n+1} = a_n + k \cdot \varrho(a_n) \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots,$$

pričom $\varrho(m)$ *označuje súčin cifier čísla m zapísaného v desiatkovej sústave (napríklad* $\varrho(413) = 12$, $\varrho(308) = 0$ *a pod.). Dokážte, že existujú kladné celé čísla a, k také, že postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *obsahuje práve 2009 rôznych čísel.* (Peter Novotný)

Riešenie. Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je evidentne rastúca až po prvý člen, v ktorého zápise sa vyskytne cifra 0 a počnúc týmto členom je konštantná. Naším cieľom je teda nájsť také hodnoty a, k, že cifra 0 sa po prvý raz vyskytne v člene a_{2009}. Úlohu vyriešime všeobecnejšie – uvedieme také hodnoty a, k, že cifra 0 sa po prvý raz vyskytne v člene a_m, pričom $m > 4$ je dané celé číslo.

Zoberme

$$a = \frac{10^{2m-5}-1}{9} = \underbrace{11\dots1}_{2m-5 \text{ jednotiek}}, \qquad k = 10^{m-3} + 4 = 1\underbrace{00\dots0}_{m-4 \text{ núl}}4.$$

Postupne máme

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a = \underbrace{11\ldots1}_{2m-5},\\
\varrho(a_1) &= 1,\\
a_2 &= a_1 + k = a_1 + 1\underbrace{00\ldots0}_{m-4}4 = \underbrace{11\ldots1}_{m-3}2\underbrace{11\ldots1}_{m-4}5,\\
\varrho(a_2) &= 10,\\
a_3 &= a_2 + 10k = a_2 + 1\underbrace{00\ldots0}_{m-4}40 = \underbrace{11\ldots1}_{m-4}22\underbrace{11\ldots1}_{m-5}55,\\
\varrho(a_3) &= 100,\\
&\;\vdots\\
a_i &= a_{i-1} + 10^{i-2}k = \underbrace{11\ldots1}_{m-i-1}\underbrace{22\ldots2}_{i-1}\underbrace{11\ldots1}_{m-i-2}\underbrace{55\ldots5}_{i-1},\\
\varrho(a_i) &= 10^{i-1},\\
&\;\vdots\\
a_{m-2} &= a_{m-3} + 10^{m-4}k = 1\underbrace{22\ldots2}_{m-3}\underbrace{55\ldots5}_{m-3},\\
\varrho(a_{m-2}) &= 10^{m-3},\\
a_{m-1} &= a_{m-2} + 10^{m-3}k = a_{m-2} + 1\underbrace{00\ldots0}_{m-4}4\underbrace{00\ldots0}_{m-3} = \underbrace{22\ldots2}_{m-3}6\underbrace{55\ldots5}_{m-3},\\
\varrho(a_{m-1}) &= 6\cdot10^{m-3},\\
a_m &= a_{m-1} + 6\cdot10^{m-3}k = a_{m-1} + 6\underbrace{00\ldots0}_{m-5}24\underbrace{00\ldots0}_{m-3} = 8\underbrace{22\ldots2}_{m-5}50\underbrace{55\ldots5}_{m-3},\\
\varrho(a_m) &= 0.
\end{aligned}
$$

Záver. Postupnosť obsahuje práve 2009 rôznych čísel napríklad pre $a = \frac{1}{9}(10^{4013} - 1)$, $k = 10^{2006} + 4$.

Iné riešenie. Zvoľme

$$
a = 6\underbrace{11\ldots1}_{2007}, \qquad k = \underbrace{33\ldots3}_{2007}4 = \frac{1}{6}\cdot 2\underbrace{00\ldots0}_{2007}4.
$$

Potom

$$
\begin{array}{lll}
a_1 = 6\underbrace{11\dots1}_{2007}, & \varrho(a_1) = 6, & k\varrho(a_1) = 2\underbrace{00\dots0}_{2007}4, \\
a_2 = 26\underbrace{11\dots1}_{2006}5, & \varrho(a_2) = 60, & k\varrho(a_2) = 2\underbrace{00\dots0}_{2007}40, \\
a_3 = 226\underbrace{11\dots1}_{2005}55, & \varrho(a_3) = 600, & k\varrho(a_3) = 2\underbrace{00\dots0}_{2007}400, \\
a_4 = 2226\underbrace{11\dots1}_{2004}555, & \varrho(a_4) = 6000, & k\varrho(a_4) = 2\underbrace{00\dots0}_{2007}4000, \\
\quad\vdots & & \\
a_{i+1} = \underbrace{22\dots2}_{i}6\underbrace{11\dots1}_{2007-i}\underbrace{55\dots5}_{i}, & \varrho(a_{i+1}) = 6\underbrace{0\dots0}_{i}, & k\varrho(a_{i+1}) = 2\underbrace{00\dots0}_{2007}4\underbrace{00\dots0}_{i}, \\
\quad\vdots & & \\
a_{2007} = \underbrace{22\dots2}_{2006}61\underbrace{55\dots5}_{2006}, & \varrho(a_{2007}) = 6\underbrace{0\dots0}_{2006}, & k\varrho(a_{2007}) = 2\underbrace{00\dots0}_{2007}4\underbrace{00\dots0}_{2006}, \\
a_{2008} = \underbrace{22\dots2}_{2007}6\underbrace{55\dots5}_{2007}, & \varrho(a_{2008}) = 6\underbrace{0\dots0}_{2007}, & k\varrho(a_{2008}) = 2\underbrace{00\dots0}_{2007}4\underbrace{00\dots0}_{2007}, \\
a_{2009} = \underbrace{22\dots2}_{2007}30\underbrace{55\dots5}_{2007}, & \varrho(a_{2009}) = 0, & k\varrho(a_{2009}) = 0
\end{array}
$$

a ďalej samozrejme $a_{2009} = a_{2010} = a_{2011} = \dots$

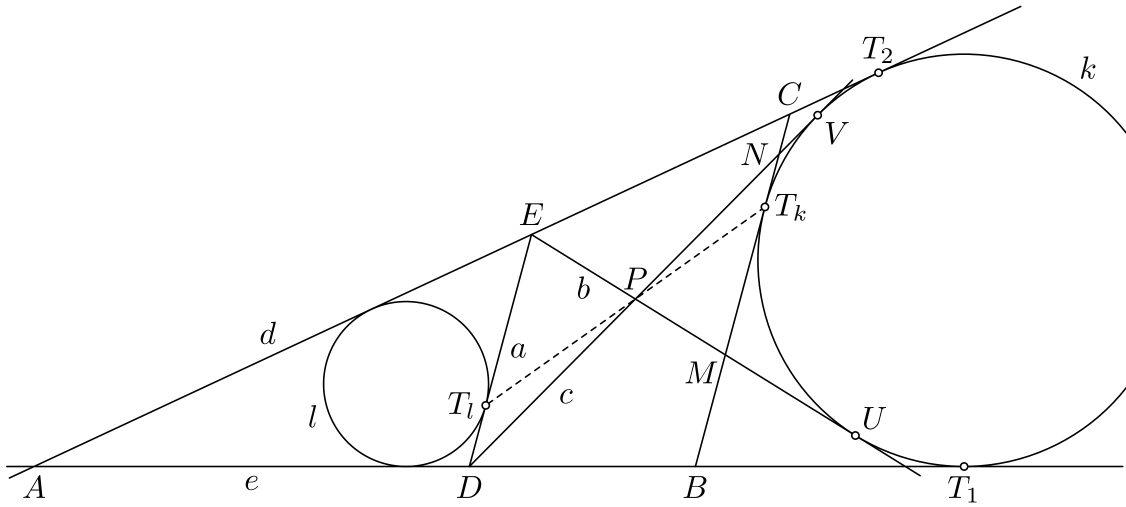
Poznámka. Na vyriešenie úlohy stačí nájsť také hodnoty a, k, aby postupnosť obsahovala *aspoň* 2009 rôznych čísel a zároveň neobsahovala nekonečne veľa rôznych čísel. Ak totiž uvedená postupnosť obsahuje práve m rôznych čísel, pričom $m > 2009$, tak postupnosť s prvým členom a_{m-2008} bude obsahovať želaných 2009 rôznych čísel.

---

3. *Nech k je kružnica pripísaná k strane BC daného trojuholníka ABC. Zvoľme priamku p rovnobežnú so stranou BC pretínajúcu úsečky AB, AC v bodoch D, E. Kružnicu vpísanú do trojuholníka ADE označme l. Dotyčnice ku kružnici k vedené z bodov D, E neprechádzajúce bodom A sa pretínajú v bode P. Dotyčnice ku kružnici l vedené z bodov B, C neprechádzajúce bodom A sa pretínajú v bode Q. Dokážte, že priamka PQ prechádza pevným bodom nezávislým od voľby priamky p.* (Tomáš Jurík)

Riešenie. Nech T_k je bod, v ktorom sa kružnica k dotýka strany BC a T_l je bod, v ktorom sa kružnica l dotýka strany DE. Ukážeme, že hľadaným pevným bodom je bod T_k.

Najskôr dokážeme, že body T_k, T_l a P sú kolineárne. Označme body dotyku kružnice k s priamkami EP, DP postupne U, V, priesečníky strany BC s týmito priamkami postupne M, N a body dotyku kružnice k s polpriamkami AB, AC postupne T_1, T_2.



Obr. 1

Keďže $BC \parallel DE$, sú trojuholníky DEP a NMP podobné a rovnoľahlosť $\mathcal{H}$ so stredom P a koeficientom $q = |MN|/|ED|$ zobrazí úsečku DE na úsečku NM. Na kolineárnosť bodov T_k, T_l, P stačí dokázať rovnosť

$$\frac{|MT_k|}{|NT_k|} = \frac{|ET_l|}{|DT_l|}; \tag{1}$$

ak je totiž splnená, zobrazí sa v rovnoľahlosti $\mathcal{H}$ bod T_l do bodu T_k.

Označme a, b, c dĺžky strán trojuholníka DEP tak ako na obr. 1. Ďalej nech $|AD| = e$, $|AE| = d$. Pripomeňme známe vzťahy pre dĺžku úseku medzi vrcholom trojuholníka a dotykovým bodom vpísanej, resp. pripísanej kružnice: V trojuholníku XYZ je vzdialenosť vrcholu X od dotykového bodu vpísanej, resp. pripísanej kružnice (ležiaceho na strane XY) rovná $(|XY|+|XZ|-|YZ|)/2$, resp. $(|XY|+|YZ|-|XZ|)/2$.

Kružnica k je pripísanou kružnicou k strane NM trojuholníka NMP. Preto

$$\frac{|MT_k|}{|NT_k|} = \frac{(|MN|+|NP|-|MP|)/2}{(|MN|+|MP|-|NP|)/2} = \frac{qa+qc-qb}{qa+qb-qc} = \frac{a+c-b}{a+b-c}. \tag{2}$$

Kružnica l je vpísanou kružnicou do trojuholníka DEA. Preto

$$\frac{|ET_l|}{|DT_l|} = \frac{(|DE|+|AE|-|AD|)/2}{(|DE|+|AD|-|AE|)/2} = \frac{a+d-e}{a+e-d}. \tag{3}$$

Ak z nejakého bodu vedieme ku kružnici dve dotyčnice, vzdialenosť oboch dotykových bodov od daného bodu je rovnaká. Opakovaným použitím tohto faktu dostávame

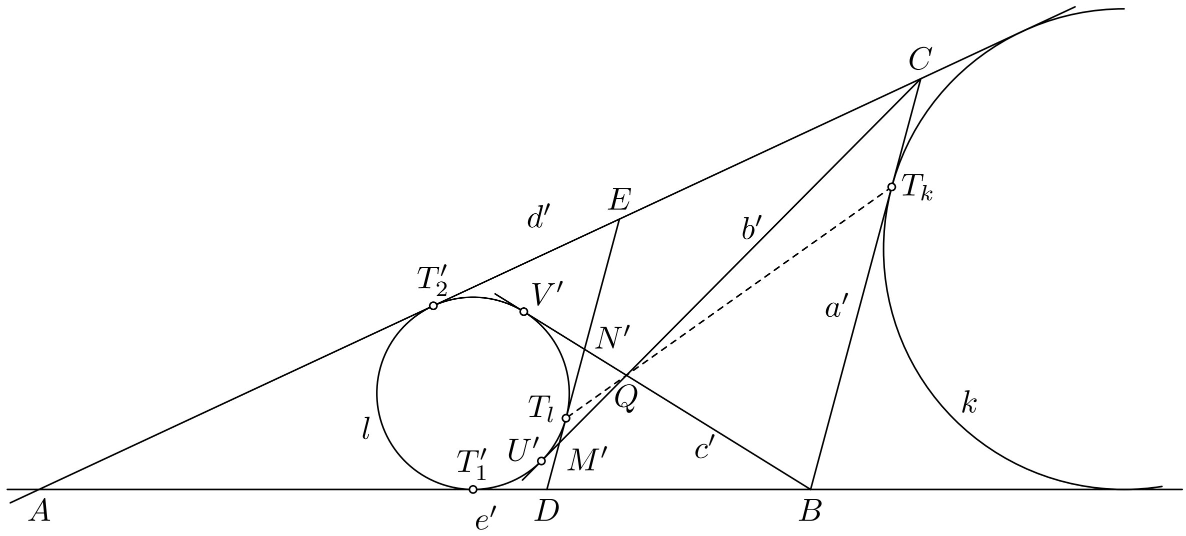
$$e+c+|PU| = e+c+|PV| = e+|DT_1| = |AT_1| = |AT_2| = d+|ET_2| = d+b+|PU|,$$

čiže $e+c = d+b$. Preto $c-b = d-e$ a dosadením do (2), (3) okamžite dostávame

$$\frac{|MT_k|}{|NT_k|} = \frac{a+(c-b)}{a-(c-b)} = \frac{a+(d-e)}{a-(d-e)} = \frac{|ET_l|}{|DT_l|},$$

čo je požadovaná rovnosť (1). Bod P teda leží na priamke $T_l T_k$.

Podobne dokážeme, že aj body T_k, T_l a Q sú kolineárne. Označme body dotyku kružnice l s priamkami CQ, BQ postupne U', V', priesečníky strany DE s týmito priamkami postupne M', N' a body dotyku kružnice l so stranami AD, AE postupne T_1', T_2'. Ďalej nech a', b', c' sú dĺžky strán trojuholníka BCQ, $|AB| = e'$, $|AC| = d'$.



Obr. 2

Analogickými úvahami ako v prvej časti dostávame (tentoraz sú obe kružnice pripísané)

$$\frac{|M'T_l|}{|N'T_l|} = \frac{a' + c' - b'}{a' + b' - c'}, \qquad \frac{|CT_k|}{|BT_k|} = \frac{a' + e' - d'}{a' + d' - e'}.$$

Porovnávaním dĺžok (obr. 2) máme

$$e' - c' - |QU'| = e' - c' - |QV'| = e' - |BT_1'| = |AT_1'| = |AT_2'| = d' - |CT_2'| = d' - b' - |QU'|,$$

čiže $c' - b' = e' - d'$ a následne

$$\frac{|M'T_l|}{|N'T_l|} = \frac{|CT_k|}{|BT_k|}.$$

Z rovnoľahlosti trojuholníkov BCQ a $N'M'Q$ napokon dostávame, že bod Q leží na priamke $T_l T_k$.

Priamka PQ (zrejme $P \neq Q$) je teda totožná s priamkou $T_l T_k$ a prechádza bodom T_k, ktorý je nezávislý od polohy priamky p.

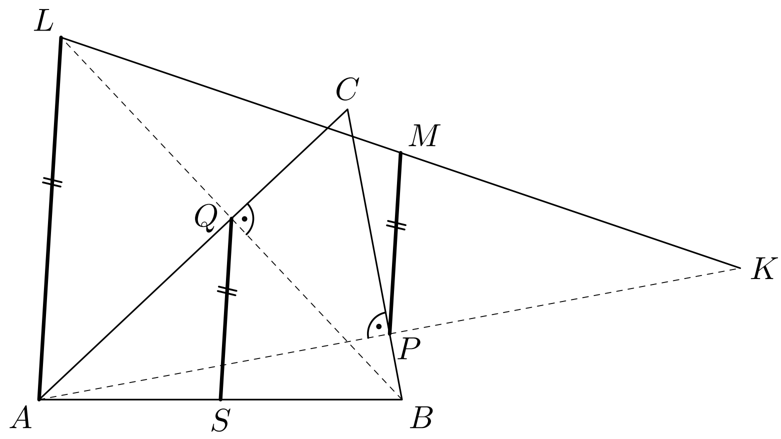
---

4. *Daná je kružnica k a jej tetiva AB, ktorá nie je jej priemerom. Vnútri dlhšieho oblúka AB kružnice k zvolíme ľubovoľne bod C. Obrazy bodov A a B v osových súmernostiach podľa priamok BC a AC označíme K a L. Dokážte, že vzdialenosť stredov úsečiek KL a AB nezávisí od polohy bodu C.* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. V trojuholníku ABC označme S stred strany AB a P, Q päty výšok z vrcholov A, B. Stred úsečky KL označme M. Body P, Q sú samozrejme stredmi úsečiek AK, BL (obr. 3). Takže QS je strednou priečkou trojuholníka LAB a MP strednou priečkou trojuholníka LAK. Odtiaľ

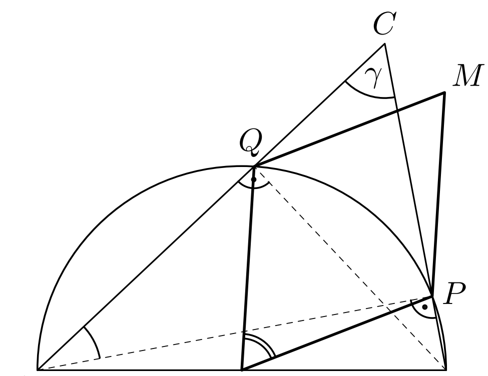
$$|QS| = \tfrac{1}{2}|LA| = |MP| \qquad \text{a} \qquad QS \parallel LA \parallel MP,$$

čiže $SPMQ$ je rovnobežník (to zrejme platí aj v prípade, keď niektorý z trojuholníkov LAB, LAK je „degenerovaný").

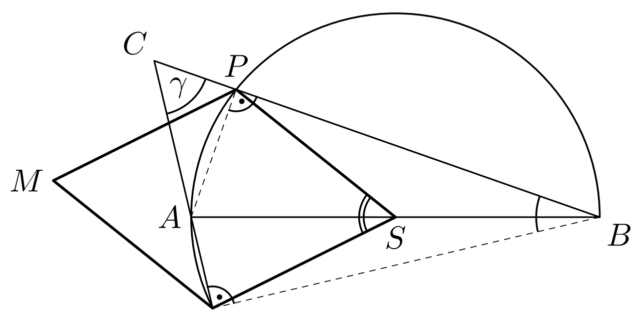


Obr. 3

Body P, Q ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AB, preto $|SP| = |SQ| = \frac{1}{2}|AB|$. Rovnobežník $SPMQ$ je teda kosoštvorec a dĺžka jeho strany nezávisí od polohy bodu C. Aby sme dokázali, že ani dĺžka jeho uhlopriečky SM nezávisí od polohy bodu C, stačí dokázať, že veľkosť uhla, ktorý zvierajú jeho strany SP, SQ, je pre ľubovoľnú polohu bodu C na kružnici k rovnaká (všetky možné kosoštvorce $SPMQ$, a teda aj ich uhlopriečky SM, sú potom navzájom zhodné).



Obr. 4a



Obr. 4b

Ak je uhol α trojuholníka ABC ostrý, leží bod Q vnútri strany AC (uhol γ je podľa zadania ostrý vždy) a uhol PSQ je stredovým uhlom k obvodovému uhlu PAQ nad tetivou PQ Tálesovej kružnice nad priemerom AB (obr. 4a). Takže

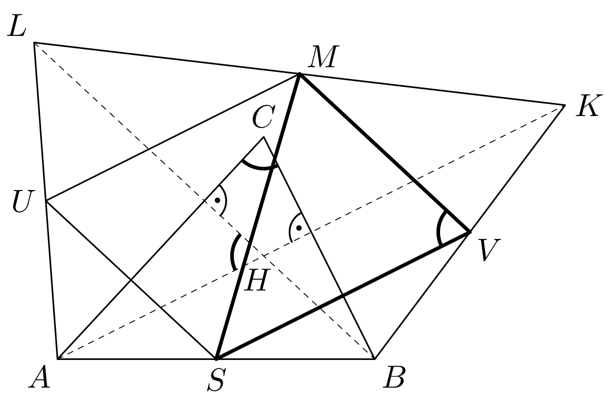
$$|\measuredangle PSQ| = 2|\measuredangle PAQ| = 2(90^\circ - \gamma) = 180^\circ - 2\gamma.$$

Rovnaké vyjadrenie dostaneme aj v prípade, že uhol α nie je ostrý, vtedy je totiž ostrý uhol β a môžeme namiesto uhla PAQ použiť obvodový uhol PBQ (obr. 4b):

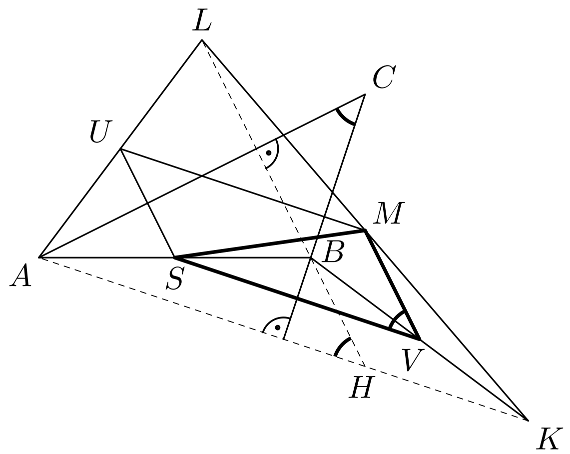
$$|\measuredangle PSQ| = 2|\measuredangle PBQ| = 2(90^\circ - \gamma) = 180^\circ - 2\gamma.$$

Keďže pri pohybe bodu C po kružnici k sa veľkosť uhla γ nemení (je to obvodový uhol nad pevnou tetivou AB), nemení sa ani veľkosť uhla PSQ, čo sme chceli dokázať.

Iné riešenie. Označme α, β, γ veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC. Budeme predpokladať, že uhol α je ostrý; prípad, keď α nie je ostrý je analogický (vtedy je β ostrý). Nech S, M, U, V sú postupne stredy úsečiek AB, KL, AL, BK a H je priesečník priamok AK a BL (obr. 5a, b). Štvoruholník $USVM$ je rovnobežník



Obr. 5a



Obr. 5b

($SU \parallel BL \parallel MV$, $SV \parallel AK \parallel MU$). Zrejme

$$|SV| = |AB| \sin\beta, \;\; |MV| = |SU| = |AB| \sin\alpha, \;\; |\measuredangle SVM| = |\measuredangle AHL| = |\measuredangle ACB| = \gamma.$$

Použitím sínusovej vety v trojuholníku ABC máme

$$\frac{|AC|}{|SV|} = \frac{1}{|AB|} \cdot \frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{1}{|AB|} \cdot \frac{|BC|}{\sin\alpha} = \frac{|BC|}{|MV|},$$

teda trojuholníky SVM a ACB sú podobné (strany zvierajúce rovnaký uhol majú dĺžky v rovnakom pomere). Keď opäť použijeme sínusovú vetu v trojuholníku ABC, dostaneme

$$|SM| = |AB| \cdot \frac{|SV|}{|AC|} = \frac{|AB|^2 \sin\beta}{|AC|} = \frac{|AB|^2 \sin\gamma}{|AB|} = |AB| \sin\gamma,$$

čo je výraz, ktorý zrejme nezávisí od polohy bodu C.

5. *Daná je n-tica celých čísel $a_1, \dots, a_n$ spĺňajúca nasledujúce podmienky:*
(i) $1 \leqq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leqq 50$;
(ii) pre každú n-ticu kladných celých čísel $b_1, \dots, b_n$ existuje kladné celé číslo m a n-tica kladných celých čísel $c_1, \dots, c_n$ taká, že

$$m \cdot b_i = c_i^{a_i} \quad \text{pre } i = 1, \dots, n.$$

Dokážte, že $n \leqq 16$ a určte počet rôznych n-tíc $a_1, \dots, a_n$ spĺňajúcich dané podmienky pre $n = 16$. (*Peter Novotný*)

Riešenie. Najskôr dokážeme, že čísla $a_1, \dots, a_n$ sú navzájom nesúdeliteľné. Ak by to tak nebolo, mali by sme $(a_i, a_j) = d > 1$ pre nejaké $i \neq j$. Nech $a_i = u \cdot d$, $a_j = v \cdot d$. Zvoľme $b_i = 1$, $b_j = 2$. Podľa podmienky (ii) existujú m, c_i a c_j také, že

$$m \cdot b_i = c_i^{a_i} \quad \text{a} \quad m \cdot b_j = c_j^{a_j}, \qquad \text{teda} \qquad m = (c_i^u)^d \quad \text{a} \quad 2m = (c_j^v)^d.$$

Odtiaľ $2(c_i^u)^d = (c_j^v)^d$, čo nie je možné, nakoľko exponent prvočísla 2 v prvočíselnom rozklade pravej strany je násobkom čísla d a v prvočíselnom rozklade ľavej strany nie je násobkom čísla d.

Predpokladajme, že čísla $a_1, \dots, a_n$ sú navzájom nesúdeliteľné. Ukážeme, že potom je podmienka (ii) splnená. Nech $b_1, \dots, b_n$ je ľubovoľná n-tica prirodzených čísel a $p_1, \dots, p_k$ sú všetky prvočísla nachádzajúce sa v prvočíselných rozkladoch čísel $b_1, \dots, b_n$. Hľadajme m v tvare

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Pre každé $i = 1, \dots, n$ označme $\beta_{i,j}$ exponent prvočísla p_j v prvočíselnom rozklade b_i. Aby číslo $m \cdot b_i$ bolo a_i-tou mocninou, stačí, aby pre každé $j = 1, \dots, k$ bolo $\alpha_j + \beta_{i,j}$ násobkom a_i. Každú hodnotu α_j teda stačí zvoliť tak, aby platilo

$$\alpha_j \equiv -\beta_{1,j} \pmod{a_1}, \quad \alpha_j \equiv -\beta_{2,j} \pmod{a_2}, \quad \dots, \quad \alpha_j \equiv -\beta_{n,j} \pmod{a_n}.$$

Existencia takého α_j vyplýva z čínskej zvyškovej vety (keďže $a_1, \dots, a_n$ sú navzájom nesúdeliteľné).

Dokázali sme, že podmienka (ii) je splnená práve vtedy, keď sú čísla $a_1, \dots, a_n$ navzájom nesúdeliteľné. Medzi číslami 1, 2, …, 50 je práve pätnásť prvočísel. Ak by bolo $n \geqq 17$, medzi číslami $2 \leqq a_2 < a_3 < \ldots < a_n \leqq 50$ by určite existovali aspoň dve čísla majúce v prvočíselnom rozklade rovnaké prvočíslo, teda by boli súdeliteľné. Preto nutne $n \leqq 16$.

Ak $n = 16$, musí byť $a_1 = 1$ a každé z pätnástich čísel $a_2, a_3, \dots, a_{16}$ musí byť mocninou iného prvočísla. Vypíšme, ktoré mocniny prvočísel môžeme použiť:

$$\begin{aligned}
p = 2:& \qquad 2, 4, 8, 16, 32,\\
p = 3:& \qquad 3, 9, 27,\\
p = 5:& \qquad 5, 25,\\
p = 7:& \qquad 7, 49,\\
p \geqq 11:& \qquad \text{iba } p.
\end{aligned}$$

Celkový počet vyhovujúcich šestnástic je teda $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$.

6. *Nech $n \geqq 16$ je prirodzené číslo. Uvažujme množinu*

$$G = \{(x, y) \ : \ x, y \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

pozostávajúcu z n^2 bodov roviny. Nech A je ľubovoľná podmnožina množiny G obsahujúca aspoň $4n\sqrt{n}$ prvkov. Dokážte, že existuje aspoň n^2 konvexných štvoruholníkov majúcich vrcholy v A, ktorých všetky uhlopriečky prechádzajú jedným bodom. (*Poľsko*)

Riešenie. Označme $|A| = m \geqq 4n\sqrt{n}$. Nech $\mathcal{S}$ je množina všetkých úsečiek majúcich krajné body v A. Zrejme $|\mathcal{S}| = \binom{m}{2}$. Súradnice stredu každej úsečky z $\mathcal{S}$ sú celé násobky čísla $\frac{1}{2}$ a ležia v konvexnom obale množiny G. Takých bodov je $(2n-1)^2$, teda menej ako $4n^2$. Preto existuje bod B, ktorý je stredom aspoň $\binom{m}{2}/(4n^2)$ úsečiek z $\mathcal{S}$. Nech $\mathcal{P}$ je množina všetkých úsečiek z $\mathcal{S}$, ktorých stredom je B. Potom

$$|\mathcal{P}| \geqq \frac{\binom{m}{2}}{4n^2} = \frac{m(m-1)}{8n^2} \geqq \frac{4n\sqrt{n}(4n\sqrt{n}-1)}{8n^2} = \frac{16n^3 - 4n\sqrt{n}}{8n^2} = 2n - \frac{1}{2\sqrt{n}} > 2n - 1,$$

takže $|\mathcal{P}| \geqq 2n$.

Rozdeľme $\mathcal{P}$ na triedy úsečiek ležiacich na jednej priamke. Označme počet týchto tried k a počet úsečiek v i-tej triede a_i pre $i = 1, \ldots, k$. Každá úsečka spomedzi a_i úsečiek jednej triedy má krajné body v G a všetkých $2a_i$ krajných bodov (ktoré sú zrejme rôzne) úsečiek jednej triedy leží na jednej priamke, preto $2a_i \leqq n$. Pritom každé dve úsečky z $\mathcal{P}$ sú uhlopriečkami rovnobežníka práve vtedy, keď neležia na jednej priamke. Pre počet rôznych rovnobežníkov s uhlopriečkami patriacimi do $\mathcal{P}$ tak dostávame

$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq k} a_i a_j = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{k} a_i^2\right) \geqq \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \frac{n}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(|\mathcal{P}|^2 - |\mathcal{P}| \cdot \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}|\mathcal{P}|\left(|\mathcal{P}| - \frac{n}{2}\right) \geqq n\left(2n - \frac{n}{2}\right) = \frac{3}{2}n^2 > n^2.$$

Existuje teda viac ako n^2 konvexných štvoruholníkov (rovnobežníkov) s požadovanou vlastnosťou.