2012/2013
62. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 17. – 24. 4. 2013.*)

1. Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geqq 2$ a ľubovoľné kladné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} k x_k \leqq \binom{n}{2} + \sum_{k=1}^{n} x_k^k.$$

2. Polpriamky OA a OB sa dotýkajú kružnice k v rôznych bodoch A a B. Nech K je vnútorný bod kratšieho oblúka AB kružnice k. Priesečník polpriamky OB s rovnobežkou s priamkou OA prechádzajúcou bodom K označme L. Priesečník priamky AK s kružnicou l opísanou trojuholníku KLB (rôzny od K) označme M. Dokážte, že priamka OM sa dotýka kružnice l.

3. V každej z troch krajín žije $2n$ matematikov. Nájdite najmenšie celé číslo k s nasledujúcou vlastnosťou: Ak každý matematik pozná aspoň k kolegov z iných krajín, tak existujú traja matematici, ktorí sa poznajú navzájom. (Vzťah „poznať sa“ je vzájomný.)

4. Nájdite všetky usporiadané trojice kladných celých čísel (a, b, c) také, že $(a, b, c) = 1$, $a \leqq b \leqq c$ a číslo $a + b + c$ je deliteľom čísla $a^n + b^n + c^n$ pre každé kladné celé číslo n.

5. Nájdite všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel, ktoré sú riešením sústavy rovníc

$$\begin{aligned} x^3 &= 3x - 12y + 50, \\ y^3 &= 12y + 3z - 2, \\ z^3 &= 27z + 27x. \end{aligned}$$

6. Nájdite všetky polynómy $P(x)$ s reálnymi koeficientmi, pre ktoré je

$$(x + 1)P(x - 1) - (x - 1)P(x)$$

konštantný polynóm.

7. Nech P, Q a R sú body na stranách BC, CA a AB ostrouhlého trojuholníka ABC také, že trojuholník PQR je rovnostranný a má minimálny obsah spomedzi všetkých takých rovnostranných trojuholníkov. Dokážte, že kolmice z bodov A, B a C postupne na strany QR, RP a PQ sa pretínajú v jednom bode.

8. Dokážte, že neexistuje celé číslo n také, že $n^7 + 7$ je druhou mocninou celého čísla.

9. Pre $n = 1, 2, 3$ budeme za číslo n-tého typu považovať nulu, ľubovoľný člen geometrickej postupnosti 1, $(n+2)$, $(n+2)^2$, $(n+2)^3$, … a tiež súčet niekoľkých jej rôznych členov. Dokážte, že každé prirodzené číslo sa dá vyjadriť ako súčet čísla prvého typu, čísla druhého typu a čísla tretieho typu.

10. Je možné zafarbiť štvorčeky nekonečnej štvorčekovej siete dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, že ľubovoľná priamka rovnobežná so stranami štvorčekov prechádza konečne veľa bielymi štvorčekmi a ľubovoľná priamka nerovnobežná so stranami štvorčekov prechádza konečne veľa čiernymi štvorčekmi? (Priamka prechádza štvorčekom, ak s ním má spoločný aspoň jeden bod.)

11. Kružnice k_1 a k_2 so stredmi v bodoch O_1 a O_2 sa pretínajú v dvoch bodoch A a B. Priamky O_2B a O_1B pretínajú kružnice k_1 a k_2 postupne v bodoch E a F (rôznych od B). Rovnobežka s priamkou EF prechádzajúca bodom B pretína kružnice k_1 a k_2 v bodoch M a N (rôznych od B). Dokážte, že ak bod B leží vnútri úsečky MN, tak $|MN| = |AE| + |AF|$.

12. Dokážte, že ak pre nezáporné čísla x, y platí nerovnosť $x^2 + y^3 \geqq x^3 + y^4$, tak platí aj nerovnosť $x^3 + y^3 \leqq 2$.

13. Pre každé prirodzené číslo $n \geqq 3$ nájdite najmenšie k také, že množinu ľubovoľných n bodov v rovine, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke, možno oddeliť systémom k priamok. (Systém priamok oddeľuje body množiny, ak pre každé dva body množiny existuje priamka, od ktorej ležia na opačných stranách.)

14. Na šachovnici $n \times n$ (pričom $n \geqq 2$) je položených niekoľko domín rozmerov 2×1, pričom na šachovnicu už nie je možné umiestniť ďalšie domino tak, aby sa neprekrývalo s nejakým už položeným dominom. Dokážte, že voľných políčok na šachovnici nie je viac ako $n^2/3$.

15. Nech $1 \leqq a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leqq 2n$ je konečná postupnosť prirodzených čísel, pričom $n \geqq 6$.

a) Dokážte, že pre $k = 6$ platí

$$\min_{1 \leqq i < j \leqq n} \operatorname{nsn}(a_i, a_j) \leqq k \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right), \tag{1}$$

kde $\operatorname{nsn}(a_i, a_j)$ označuje najmenší spoločný násobok čísel a_i, a_j. Ukážte, že koeficient $k = 6$ je najlepší možný, t. j. pre žiadne $n \geqq 6$ neexistuje $k < 6$ také, že (1) platí pre všetky postupnosti $\{a_i\}_{i=1}^n$ vyhovujúce zadaniu.

b) Dokážte, že

$$\max_{1 \leqq i < j \leqq n} \operatorname{nsd}(a_i, a_j) > \frac{38}{147} n - \frac{310}{21},$$

kde $\operatorname{nsd}(a_i, a_j)$ označuje najväčší spoločný deliteľ čísel a_i, a_j.

16. Neprázdnu množinu $A \subseteq \mathbb{Z}$ nazveme *čarovná*, ak spĺňa podmienku:

Ak $x, y \in A$ (môže byť aj $x = y$), potom aj $x^2 + kxy + y^2 \in A$ pre všetky $k \in \mathbb{Z}$.

Nájdite všetky také dvojice nenulových celých čísel m, n (vrátane prípadov $m = n$), že jediná čarovná množina obsahujúca aj m aj n je $\mathbb{Z}$.

17. Daný je trojuholník ABC, pričom $|AB| \neq |AC|$. Označme O stred jeho opísanej kružnice. Os uhla BAC pretína stranu BC v bode D. Bod E je obrazom bodu D v stredovej súmernosti podľa stredu strany BC. Priamky kolmé na BC prechádzajúce postupne bodmi D, E pretínajú AO a AD postupne v X, Y. Dokážte, že body B, X, C a Y ležia na jednej kružnici.

18. Filip a Miki hrajú hru s $N > 2013$ účastníkmi výberového sústredenia a 2013 stoličkami umiestnenými na kružnici. Najprv Filip posadí účastníkov na stoličky tak, aby na každej stoličke sedel aspoň jeden človek. V ďalšom ťahu ide Miki a už sa budú stále striedať.

- Miki v každom svojom ťahu presadí z každej stoličky práve jedného človeka na susednú.
- Filip vyberie niekoľko ľudí, ktorí sedia navzájom na rôznych stoličkách a ktorých Miki v predchádzajúcom ťahu nepresadil, a každého z nich presadí na susednú stoličku.

Nájdite najmenšie N také, že Filipovi sa vždy podarí, aby po jeho ťahu boli obsadené všetky stoličky bez ohľadu na Mikiho snaženie a dĺžku partie.