2007/2008
57. ročník MO *Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

---

1. *Určte všetky trojice (x, y, z) kladných reálnych čísel, ktoré sú riešením sústavy rovníc*

$$\begin{aligned} 2x^3 &= 2y(x^2+1) - (z^2+1), \\ 2y^4 &= 3z(y^2+1) - 2(x^2+1), \\ 2z^5 &= 4x(z^2+1) - 3(y^2+1). \end{aligned}$$

(*Adam Osekowski*)

Riešenie. Predpokladajme, že trojica (x, y, z) kladných reálnych čísel je riešením zadanej sústavy. Rozoberieme tri prípady podľa toho, ktoré z čísel x, y, z je najmenšie. Ukáže sa, že v každom z týchto prípadov stačí uvažovať len jednu rovnicu sústavy. Viackrát použijeme známu nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom n-tice kladných reálnych čísel (v našom prípade bude $n \in \{2, 3, 4\}$), v ktorej rovnosť platí práve vtedy, keď je všetkých n čísel rovnakých.

Prípad 1. Ak $x \geqq y$, $z \geqq y$, tak zrejme platia nerovnosti

$$2x^3 + (z^2+1) \geqq 2yx^2 + (z^2+1) \geqq 2yx^2 + 2z \geqq 2yx^2 + 2y = 2y(x^2+1),$$

teda $2x^3 \geqq 2y(x^2+1) - (z^2+1)$. Pritom rovnosť nastáva len v prípade, keď $2x^3 = 2yx^2$, $z^2 + 1 = 2z$ a $2z = 2y$, čiže $x = y$, $z = 1$ a $z = y$. Týmto podmienkam, a teda aj prvej rovnici sústavy, vyhovuje jedine trojica $x = y = z = 1$. Ľahko overíme, že táto trojica spĺňa aj zvyšné dve rovnice.

Prípad 2. Ak $x \geqq z$, $y \geqq z$, dostávame

$$\begin{aligned} 2y^4 + 2(x^2+1) &\geqq 2y^4 + 2 \cdot 2x = (y^4 + y^4 + x) + 3x \geqq \\ &\geqq (y^4 + y^2z^2 + z) + 3z \geqq 3\sqrt[3]{y^6z^3} + 3z = 3z(y^2+1), \end{aligned}$$

teda $2y^4 \geqq 3z(y^2+1) - 2(x^2+1)$. Rovnosť nastáva jedine v prípade, keď sú splnené podmienky $x = 1$, $y^4 = y^2z^2$, $x = z$ a $y^4 = y^2z^2 = z$. Tomu, čiže aj druhej rovnici sústavy, vyhovuje jedine trojica $x = y = z = 1$.

Prípad 3. Ak $y \geqq x$, $z \geqq x$, podobne ako v predošlom prípade máme

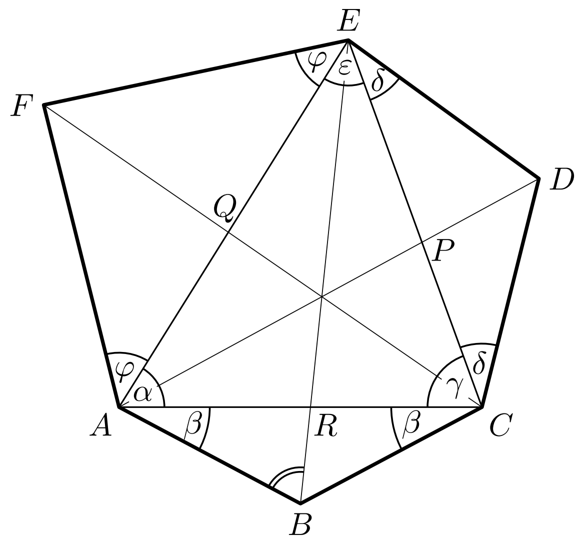
$$\begin{aligned} 2z^5 + 3(y^2+1) &\geqq 2z^5 + 3 \cdot 2y = (z^5 + z^5 + y + y) + 4y \geqq \\ &\geqq (z^5 + z^3x^2 + x + x) + 4x \geqq 4\sqrt[4]{z^8x^4} + 4x = 4x(z^2+1), \end{aligned}$$

teda $2z^5 \geqq 4x(z^2+1) - 3(y^2+1)$. Rovnosť dostaneme iba pri dodržaní podmienok $y = 1$, $z^5 = z^3x^2$, $y = x$ a $z^5 = z^3x^2 = x$. Tretia rovnica sústavy je teda splnená jedine pre trojicu $x = y = z = 1$.

Odpoveď. Jediným riešením sústavy je trojica $(1, 1, 1)$.

2. *Daný je konvexný šesťuholník $ABCDEF$, pričom $|\measuredangle FAB| = |\measuredangle BCD| = |\measuredangle DEF|$ a $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|EF| = |FA|$. Dokážte, že priamky AD, BE a CF sa pretínajú v jednom bode.* (Waldemar Pompe)

Riešenie. Označme v trojuholníku ACE veľkosti vnútorných uhlov pri vrcholoch A, C, E postupne α, γ, ε. Trojuholníky ACB, CED, EAF sú podľa zadania rovnoramenné. Označme veľkosti ich vnútorných uhlov pri základniach postupne β, δ, φ (obr. 1). Tvrdenie dokážeme použitím Cèvovej vety. Kvôli tomu označme ešte P, Q, R priesečníky priamok AD, CF, EB postupne so stranami CE, EA, AC trojuholníka ACE.



Obr. 1

Zo sínusovej vety v trojuholníku ABR máme

$$\frac{|AR|}{\sin|\measuredangle ABE|} = \frac{|BR|}{\sin\beta}, \qquad \text{teda} \qquad |AR| = \frac{|BR| \cdot \sin|\measuredangle ABE|}{\sin\beta}. \tag{1}$$

Zo sínusovej vety v trojuholníku ABE máme

$$\frac{|AE|}{\sin|\measuredangle ABE|} = \frac{|BE|}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad \text{teda} \qquad \sin|\measuredangle ABE| = \frac{|AE| \cdot \sin(\alpha+\beta)}{|BE|}.$$

Dosadením do (1) dostávame

$$|AR| = \frac{|BR| \cdot |AE| \cdot \sin(\alpha+\beta)}{|BE| \cdot \sin\beta}.$$

Zrejme analogicky (zo sínusových viet v trojuholníkoch CBR a CBE) možno odvodiť

$$|CR| = \frac{|BR| \cdot |CE| \cdot \sin(\gamma+\beta)}{|BE| \cdot \sin\beta}.$$

Preto

$$\frac{|AR|}{|CR|} = \frac{|AE| \cdot \sin(\alpha+\beta)}{|CE| \cdot \sin(\gamma+\beta)}.$$

Opäť analogicky možno vyjadriť pomery

$$\frac{|CP|}{|EP|}=\frac{|CA|\cdot\sin(\gamma+\delta)}{|EA|\cdot\sin(\varepsilon+\delta)} \qquad \text{a} \qquad \frac{|EQ|}{|AQ|}=\frac{|EC|\cdot\sin(\varepsilon+\varphi)}{|AC|\cdot\sin(\alpha+\varphi)}.$$

Odtiaľ

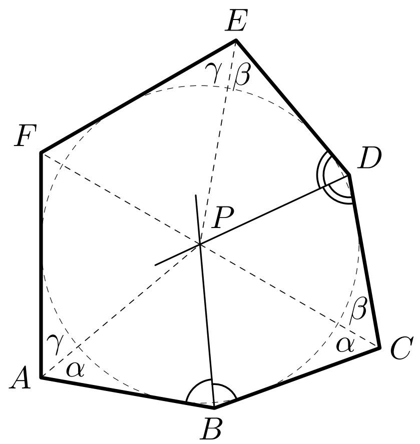
$$\frac{|AR|}{|CR|}\cdot\frac{|CP|}{|EP|}\cdot\frac{|EQ|}{|AQ|}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\gamma+\beta)}\cdot\frac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\varepsilon+\delta)}\cdot\frac{\sin(\varepsilon+\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)}. \tag{2}$$

Avšak podľa zadania platí $\varphi+\alpha+\beta=\beta+\gamma+\delta=\delta+\varepsilon+\varphi$. Preto

$$\alpha+\beta=\varepsilon+\delta, \quad \gamma+\delta=\alpha+\varphi, \quad \varepsilon+\varphi=\gamma+\beta$$

a súčin (2) je rovný 1. Podľa Cèvovej vety sa teda priamky AD, BE a CF pretínajú v jednom bode.

Iné riešenie. Označme P priesečník osí vnútorných uhlov daného šesťuholníka pri vrcholoch B a D (obr. 2). Dokážeme, že šesťuholníku $ABCDEF$ sa dá vpísať kružnica, ktorej stredom je P. Zadané tvrdenie bude potom vyplývať z Brianchonovej vety[1].



Obr. 2

Z rovnosti $|AB|=|BC|$ vyplýva, že trojuholníky ABP a CBP sú zhodné podľa vety *sus*. Preto $|\measuredangle BAP|=|\measuredangle BCP|=\alpha$. Rovnako sú zhodné trojuholníky CDP a EDP, t. j. $|\measuredangle DCP|=|\measuredangle DEP|=\beta$.

Z uvedených zhodností navyše máme $|AP|=|CP|=|EP|$, odkiaľ spolu so zadanou rovnosťou $|AF|=|EF|$ dostávame podľa vety *sss* zhodnosť trojuholníkov AFP a EFP. Preto os vnútorného uhla pri vrchole F prechádza cez bod P a $|\measuredangle FAP|=|\measuredangle FEP|=\gamma$.

Rovnosti $|\measuredangle FAB|=|\measuredangle BCD|=|\measuredangle DEF|$ sú ekvivalentné s rovnosťami $\gamma+\alpha=\alpha+\beta=\beta+\gamma$, z ktorých triviálne vyplýva $\alpha=\beta=\gamma$. Preto aj osi vnútorných uhlov pri vrcholoch A, C a E prechádzajú cez bod P a šesťuholníku $ABCDEF$ sa dá vpísať kružnica so stredom P.

[1] Uvedená veta hovorí, že ak sa strany šesťuholníka $ABCDEF$ dotýkajú jednej kužeľosečky, tak priamky AD, BE a CF sa pretínajú v jednom bode.

3. *Nájdite všetky prvočísla p, pre ktoré je číslo*

$$\binom{p}{1}^2+\binom{p}{2}^2+\dots+\binom{p}{p-1}^2$$

deliteľné číslom p^3. (Jarosław Wróblewski)

Riešenie. Nech $M=\{1,2,\dots,p-1\}$ je množina všetkých nenulových zvyškov po delení p. Pre každé $k\in M$ je kombinačné číslo

$$\binom{p}{k}=\frac{p!}{k!(p-k)!}$$

deliteľné prvočíslom p, lebo všetky činitele súčinu $k!(p-k)!$ v menovateli sú menšie ako p (a teda nesúdeliteľné s p), zatiaľ čo čitateľ $p!$ zrejme prvočíslom p deliteľný je. Každý zo sčítancov súčtu v zadaní je teda deliteľný číslom p^2 a našou úlohou je zistiť, pre ktoré prvočísla p je súčet

$$S=\frac{1}{p^2}\binom{p}{1}^2+\frac{1}{p^2}\binom{p}{2}^2+\dots+\frac{1}{p^2}\binom{p}{p-1}^2 \tag{1}$$

deliteľný p.

Pre každé $k\in M$ skúmajme, aký dáva prirodzené číslo

$$a_k=\frac{1}{p^2}\binom{p}{k}^2=\left(\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}\right)^2 \tag{2}$$

zvyšok po delení p. Keďže pre každé $i=k,k+1,p-1$ máme $p-i\equiv -i \pmod p$, tak

$$\begin{aligned}(p-k)!&=(p-k)\,(p-(k+1))\dots(p-(p-1))\equiv\\&\equiv(-1)^{p-k}k(k+1)\dots(p-1)\pmod p\end{aligned}$$

Z toho úpravou vzťahu (2) dostávame

$$\begin{aligned}((p-1)!)^2&=a_k(k!(p-k)!)^2\equiv a_k(k!(-1)^{p-k}k(k+1)\dots(p-1))^2=\\&=a_k\cdot k^2((p-1)!)^2\pmod p.\end{aligned}$$

Túto kongruenciu môžeme vydeliť výrazom $((p-1)!)^2$, ktorý je nesúdeliteľný s p. Teda

$$1\equiv a_k\cdot k^2 \pmod p. \tag{3}$$

Ako vieme, ku každému zvyšku $k\in M$ existuje práve jeden zvyšok $z_k\in M$ taký, že $z_k\cdot k\equiv 1 \pmod p$; ak navyše $k,l\in M$ sú rôzne, tak aj z_k, z_l sú rôzne[2]. Teda množina

[2] Existencia zvyšku z_k vyplýva z existencie celých čísel a, b takých, že $ak+bp=1$. Jednoznačnosť je zrejmá: ak $1\equiv z_k\cdot k\equiv z'_k\cdot k \pmod p$, tak vydelením k máme $z_k\equiv z'_k \pmod p$. Rôznosť triviálne vyplýva z jednoznačnosti a z vlastnosti $z_{z_k}=k$: ak $z_k=z_l$, tak $k=z_{z_k}=z_{z_l}=l$.

$M' = \{z_1, z_2, \dots, z_{p-1}\}$ má rovnako veľa prvkov ako množina M, a keďže $M' \subset M$, nutne $M' = M$.

Z definície prvku z_k dostávame $1 = 1^2 \equiv (z_k \cdot k)^2 = z_k^2 \cdot k^2 \pmod{p}$. Spolu s (3) potom $a_k \cdot k^2 \equiv z_k^2 \cdot k^2 \pmod{p}$ a po vydelení k^2 máme $a_k \equiv z_k^2 \pmod{p}$. Pre zvyšok súčtu (1) teda platí

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} \equiv z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{p-1}^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + (p-1)^2 = \\ = \tfrac{1}{6}p(p-1)(2p-1) \pmod{p}$$

(využili sme dokázanú množinovú rovnosť $\{z_1, z_2, \dots, z_{p-1}\} = \{1, 2, \dots, p-1\}$ a známy vzorec pre súčet druhých mocnín). Ľahko možno priamym dosadením overiť, že výraz $\frac{1}{6}p(p-1)(2p-1)$ pre $p = 2, 3$ nie je násobkom p. Naopak, každé prvočíslo $p \geqq 5$ je nesúdeliteľné s číslom 6, čiže p je deliteľom čísla $p \cdot \frac{1}{6}(p-1)(2p-1)$.

Odpoveď. Zadaný súčet je deliteľný číslom p^3 pre všetky prvočísla väčšie ako 4.

---

4. *Dokážte, že existuje také prirodzené číslo n, že číslo $k^2 + k + n$ nemá žiadneho prvočíselného deliteľa menšieho ako* 2008 *pre žiadne celé číslo k.*

(*Jarosław Wróblewski*)

Riešenie. Nech p je dané prvočíslo. Skúmajme, aký zvyšok po delení p môže dávať číslo $k^2 + k$. Na to stačí za k dosadiť čísla 0, 1, …, $p-1$, ďalej sa už budú zvyšky periodicky opakovať. Pre $p = 2, 3, 5, 7$ dostaneme zvyšky uvedené v tabuľke.

$p \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
2	0	0					
3	0	2	0				
5	0	2	1	2	0		
7	0	2	6	5	6	2	0

Vidíme, že v postupnosti zvyškov sa niektorý zvyšok neobjaví. Napríklad pre $p = 2$ nedáva $k^2 + k$ nikdy zvyšok 1, pre $p = 3$ nedostaneme zvyšok 1, pre $p = 5$ zvyšok 3 ani 4, atď. Aby sme to dokázali pre všeobecné p, stačí overiť, že niektorý zvyšok sa v postupnosti objaví aspoň dvakrát. Počet rôznych zvyškov je totiž p a dĺžka postupnosti je tiež p, teda akonáhle sa v postupnosti nejaký zvyšok zopakuje, nebude už v nej dosť miesta pre všetky rôzne zvyšky.

Opakujúcim sa zvyškom je napríklad 0, platí totiž

$$0^2 + 0 \equiv 0 \pmod{p} \qquad \text{aj} \qquad (p-1)^2 + (p-1) = p^2 - p \equiv 0 \pmod{p},$$

čiže zvyšok 0 dostaneme pre $k = 0$ aj pre $k = p - 1$.

Nech $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ je množina všetkých prvočísel menších ako 2008. Pre každé $j = 1, 2, \dots, m$ označme r_{p_j} ľubovoľný zo zvyškov po delení prvočíslom p_j, pre ktorý $k^2 + k \not\equiv r_{p_j} \pmod{p_j}$ pre všetky celé čísla k (už sme dokázali, že taký zvyšok existuje). Aby sme vyhoveli zadaniu, stačí zvoliť n, ktoré spĺňa

$$\begin{aligned} n &\equiv -r_{p_1} \pmod{p_1}, \\ n &\equiv -r_{p_2} \pmod{p_2}, \\ &\vdots \\ n &\equiv -r_{p_m} \pmod{p_m}, \end{aligned}$$

potom totiž $k^2 + k + n \equiv k^2 + k - r_{p_j} \not\equiv 0 \pmod{p_j}$ pre všetky $j = 1, 2, \ldots, m$. Existencia požadovaného n už priamo vyplýva z čínskej zvyškovej vety[3], keďže prvočísla $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sú navzájom nesúdeliteľné.

---

5. *Daný je pravidelný päťuholník $ABCDE$. Určte najmenšiu hodnotu výrazu*

$$\frac{|PA| + |PB|}{|PC| + |PD| + |PE|},$$

pričom P je ľubovoľný bod ležiaci v rovine päťuholníka $ABCDE$. (Waldemar Pompe)

Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že pravidelný päťuholník $ABCDE$ má dĺžku strany 1. Potom každá z jeho uhlopriečok má dĺžku[4]

$$u = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Použitím Ptolemaiovej nerovnosti[5] pre štvoruholníky $APBE$, $APBD$, $APBC$ (obr. 3), resp. príslušné štvorice bodov, pokiaľ body v uvedenom poradí netvoria štvoruholníky, dostávame

$$\begin{aligned} |PA| \cdot u + |PB| \cdot 1 &\geqq 1 \cdot |PE|, \\ |PA| \cdot u + |PB| \cdot u &\geqq 1 \cdot |PD|, \\ |PA| \cdot 1 + |PB| \cdot u &\geqq 1 \cdot |PC|. \end{aligned} \tag{1}$$

Sčítaním týchto nerovností už získame priamo dolné ohraničenie pre výraz zo zadania:

$$(|PA| + |PB|) \cdot (2u + 1) \geqq |PC| + |PD| + |PE|,$$

odkiaľ

$$\frac{|PA| + |PB|}{|PC| + |PD| + |PE|} \geqq \frac{1}{2u + 1}. \tag{2}$$

---

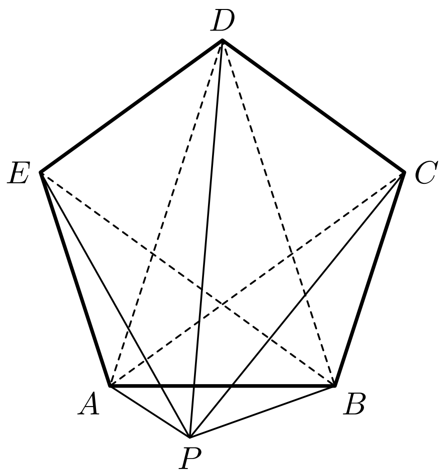
[3] Podľa nej, ak $q_1, \ldots, q_m$ sú navzájom nesúdeliteľné čísla a $a_1, \ldots, a_m$ sú ľubovoľné celé čísla, tak existuje celé číslo x spĺňajúce

$$x \equiv a_1 \pmod{q_1}, \quad x \equiv a_2 \pmod{q_2}, \quad \ldots, \quad x \equiv a_m \pmod{q_m}.$$

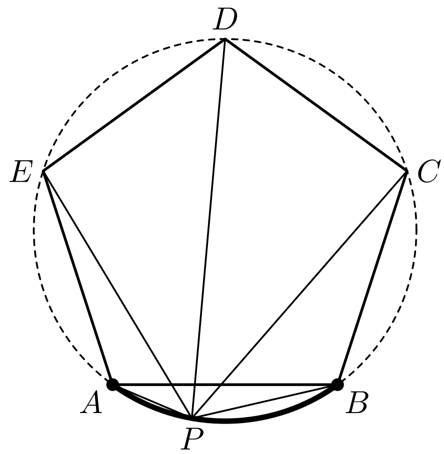
Túto vetu možno jednoducho dokázať priamou konštrukciou x: Prvú kongruenciu spĺňa $x = kq_1 + a_1$ pre ľubovoľné celé k. Ak za k dosadíme postupne $0, 1, \ldots, q_2 - 1$, pre x dostaneme q_2 rôznych zvyškov po delení q_2, jeden z nich $k'q_1 + a_1$ teda bude rovný a_2. Čiže aby sme splnili aj druhú kongruenciu, stačí zvoliť $x = (k' + lq_2)q_1 + a_1$ pre ľubovoľné celé l. Za l dosadíme postupne $0, 1, \ldots, q_3 - 1$, dostaneme q_3 rôznych zvyškov po delení q_3, jeden z nich bude rovný a_3, atď.

[4] Dĺžku uhlopriečky u pravidelného päťuholníka $ABCDE$ so stranou dĺžky 1 možno jednoducho vypočítať napríklad z podobnosti rovnoramenných trojuholníkov CAB a DEX, kde X je priesečník uhlopriečok AD a EC. Totiž $ABCX$ je kosoštvorec a teda $|EX| = u - 1$, čiže $(u - 1) : 1 = 1 : u$.

[5] Ak X, Y, Z, W sú ľubovoľné štyri body v rovine, tak podľa Ptolemaiovej nerovnosti platí $|XY| \cdot |ZW| + |YZ| \cdot |WX| \geqq |XZ| \cdot |YW|$, pričom rovnosť podľa Ptolemaiovej vety platí práve vtedy, keď body X, Y, Z, W ležia (v tomto poradí) na jednej kružnici. Ak $XYZW$ je štvoruholník, tak Ptolemaiova nerovnosť (resp. veta) hovorí, že súčet súčinov dĺžok protiľahlých strán nie je menší ako súčin dĺžok uhlopriečok, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď štvoruholník $XYZW$ je tetivový.



Obr. 3



Obr. 4

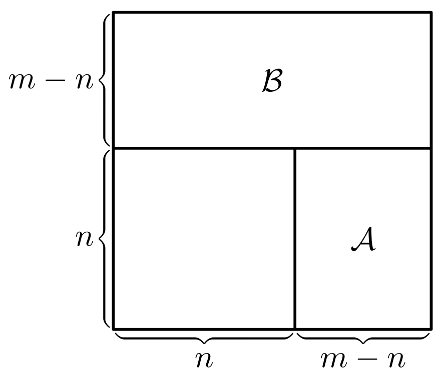
Pritom rovnosť vo všetkých nerovnostiach v (1), čiže aj v (2), platí práve vtedy, keď sú štvoruholníky $APBE$, $APBD$, $APBC$ tetivové (pripúšťa sa aj možnosť $P = A$, resp. $P = B$), t. j. keď bod P leží na kratšom oblúku AB kružnice opísanej päťuholníku $ABCDE$ (obr. 4). Najmenšia možná hodnota zadaného výrazu je preto

$$\frac{1}{2u+1} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5} - 2.$$

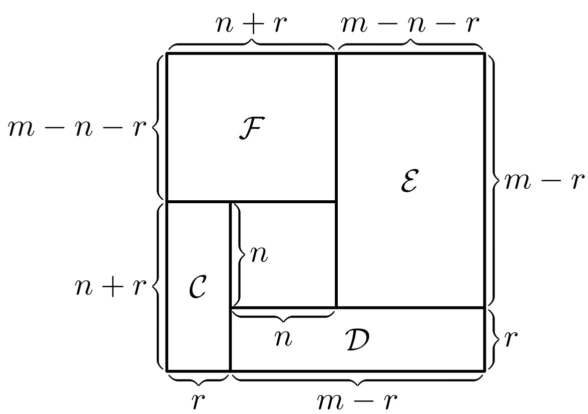
---

6. *Nájdite všetky trojice (k, m, n) prirodzených čísel majúce nasledujúcu vlastnosť: Štvorec s dĺžkou strany m sa dá rozdeliť na niekoľko pravouholníkov s rozmermi $1 \times$ $\times\, k$ a práve jeden štvorec s dĺžkou strany n.* (Jarosław Wróblewski)

Riešenie. Zrejme každý pravouholník, ktorého dĺžka aspoň jednej strany je násobkom k, sa dá rozdeliť na pravouholníky rozmerov $1 \times k$. Pokúsme sa teda rozdeliť štvorec $m \times m$ na jeden štvorec $n \times n$ a niekoľko pravouholníkov s uvedenou vlastnosťou. Samozrejme, zmysel má zaoberať sa iba prípadom $m \geqq n$.



Obr. 5a



Obr. 5b

Ak $k \mid m-n$, môžeme štvorec $m \times m$ rozdeliť tak, ako je znázornené na obr. 5a, oba pravouholníky $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ totiž majú jednu stranu dĺžky $m-n$, ktorá je násobkom k.

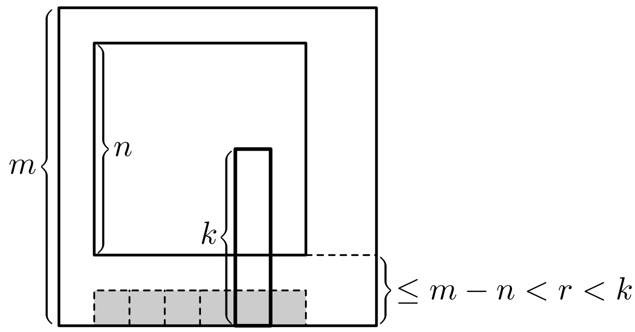
Ak $k \mid m+n$ a $n+r \leqq m$, pričom r je zvyšok, ktorý dáva číslo m po delení k, dá sa štvorec $m \times m$ rozdeliť tak, ako na obr. 5b. Pravouholníky $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ majú jednu stranu dĺžky $m-r$, ktorá je násobkom k. Podmienka $k \mid m+n$ zabezpečuje, že násobkom k je aj číslo $n+r$, t. j. dĺžka jednej zo strán v pravouholníkoch $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$. Vďaka nerovnosti $n+r \leqq m$ majú pravouholníky $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ stranu nezápornej dĺžky $m-n-r$, uvedené rozdelenie teda naozaj je možné (strany dĺžky 0 sú povolené, v takom prípade jednoducho na pokrytie degenerovaného pravouholníka rozmerov $0 \times l$ nepotrebujeme žiadny pravouholník $1 \times \times k$).

Takže aby trojica (k, m, n), pričom $m \geqq n$, vyhovovala zadaniu, stačí, aby bola splnená aspoň jedna z podmienok

(a) $k \mid m-n$;

(b) $k \mid m+n$ a súčasne $n+r \leqq m$, kde r je zvyšok, ktorý dáva číslo m po delení k.

Ukážeme, že tieto podmienky sú zároveň nutné. Najskôr dokážeme, že ak pre trojicu (k, m, n), pričom $m > n$, existuje vyhovujúce rozdelenie, tak $n+r \leqq m$ (to pri $m > n$ triviálne platí, aj keď je splnená podmienka (a), nemusíme teda rozlišovať dva prípady). Predpokladajme sporom, že máme vyhovujúce rozdelenie a pritom $n+r > m$. Bez ujmy na všeobecnosti nech štvorec $n \times n$ sa nedotýka spodnej strany štvorca $m \times m$ (obr. 6). Keďže $m-n < r < k$, všetky jednotkové štvorčeky dotýkajúce sa priemetu štvorca $n \times n$ na spodnú stranu štvorca $m \times m$ (na obr. 6 znázornené sivou farbou) musia byť pokryté „ležiacimi" pravouholníkmi $1 \times k$ (t. j. takými, ktoré majú dlhšiu stranu rovnobežnú so spodnou stranou štvorca $m \times m$); „stojace" pravouholníky $1 \times k$ ich nemôžu pokrývať, lebo by mali spoločný prienik so štvorcom $n \times n$.



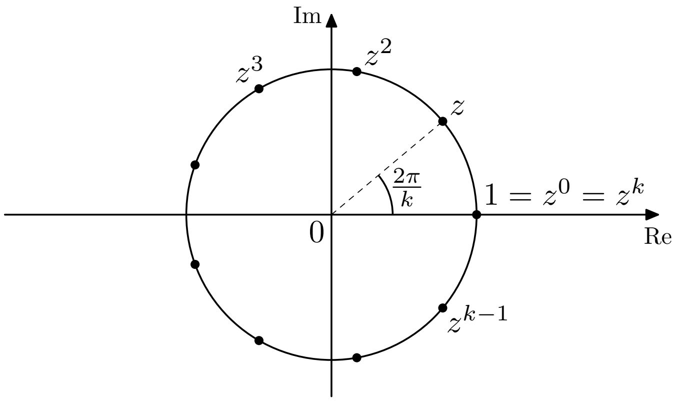
Obr. 6

Nech p je počet „ležiacich" pravouholníkov $1 \times k$ pokrývajúcich spomenutých n sivých jednotkových štvorčekov. Keďže tieto pravouholníky pokrývajú len štvorčeky pri spodnej strane štvorca $m \times m$ a zároveň pokrývajú minimálne n sivých jednotkových štvorčekov, platia nerovnosti $n \leqq pk \leqq m$. Spojením s nerovnosťou $n+r > m$ dostávame

$$m-r < pk \leqq m,$$

čo je v spore s tým, že r je zvyšok, ktorý dáva m po delení k (medzi číslami $m-r$ a m nemôže ležať žiadny násobok čísla k).

Ostáva dokázať, že $k \mid m-n$ alebo $k \mid m+n$. Hlavná myšlienka bude nasledovná. Do každého jednotkového štvorčeka napíšeme jedno číslo. Pritom celé očíslovanie urobíme tak, aby v každom pravouholníku $1 \times k$ bol súčet čísel rovný 0. To znamená, že v každom vyhovujúcom rozdelení bude musieť byť súčet všetkých čísel vo štvorci $m \times m$ rovnaký ako súčet čísel v menšom štvorci $n \times n$. Porovnaním oboch súčtov stanovíme nutné podmienky pre k, m a n.

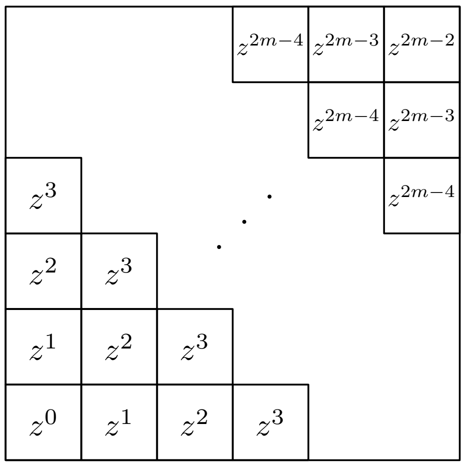


Obr. 7

Výhodné bude očíslovanie pomocou komplexných čísel. Nech $z = \cos \frac{2\pi}{k} + i \sin \frac{2\pi}{k}$. Teda z je k-ta komplexná odmocnina z čísla 1 s najmenším uhlom (obr. 7). Pritom

$$z^0 + z^1 + \cdots + z^{k-1} = \frac{z^k - 1}{z - 1} = \frac{0}{z - 1} = 0. \tag{1}$$

Očíslujme štvorčeky tak, ako je naznačené na obr. 8, t. j. ak štvorec $m \times m$ je umiestnený do prvého kvadrantu súradnicovej sústavy s vrcholom v počiatku, tak do štvorčeka, ktorého ľavý dolný vrchol má súradnice (x, y), napíšeme číslo z^{x+y}.



Obr. 8

Uvažujme ľubovoľný pravouholník $1 \times k$. Nech v jeho štvorčeku s najmenšou x-ovou (ak sa jedná o „ležiaci“ pravouholník), resp. najmenšou y-ovou (ak je to „stojaci“ pravouholník) je napísané číslo z^t. Potom súčet všetkých čísel v ňom napísaných je (s využitím (1))

$$z^t + z^{t+1} + \cdots + z^{t+k-1} = z^t(z^0 + z^1 + \cdots + z^{k-1}) = 0,$$

teda očíslovanie spĺňa požadovanú podmienku.

Súčet čísel v ľubovoľnom štvorci $n \times n$, ktorého ľavý dolný štvorček má číslo z^t, je rovný (sčitujúc po jednotlivých riadkoch)

$$
\begin{aligned}
&(z^t + \dots + z^{t+n-1}) + (z^{t+1} + \dots + z^{t+n}) + \dots + (z^{t+n-1} + \dots + z^{t+2n-2}) = \\
&= (z^t + z^{t+1} + \dots + z^{t+n-1})(z^0 + z^1 + \dots + z^{n-1}) = \\
&= z^t(z^0 + z^1 + \dots + z^{n-1})^2 = z^t \left(\frac{z^n - 1}{z - 1}\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Tento vzťah môžeme použiť aj na výpočet súčtu v celom štvorci $m \times m$. Ten má v ľavom dolnom štvorčeku číslo $z^0 = 1$, takže súčet čísel v ňom je $(z^m - 1)^2/(z - 1)^2$.

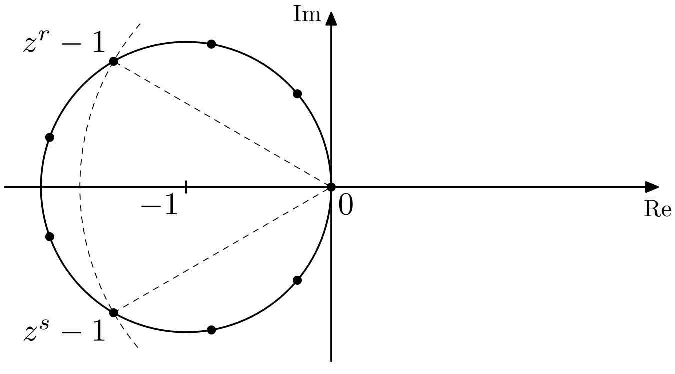
Ak teda máme vyhovujúce rozdelenie, pričom v ľavom dolnom štvorčeku štvorca $n \times n$ je napísané číslo z^t, musí platiť

$$z^t \left(\frac{z^n - 1}{z - 1}\right)^2 = \left(\frac{z^m - 1}{z - 1}\right)^2 .$$

Aby sa dve komplexné čísla rovnali, musia sa rovnať aj ich absolútne hodnoty. Dôsledkovými úpravami predošlej rovnosti (využijúc zrejmý vzťah $|z| = 1$) tak postupne dostávame

$$
\begin{aligned}
\left| z^t \left(\frac{z^n - 1}{z - 1}\right)^2 \right| &= \left| \left(\frac{z^m - 1}{z - 1}\right)^2 \right|, \\
|z|^t \frac{|z^n - 1|^2}{|z - 1|^2} &= \frac{|z^m - 1|^2}{|z - 1|^2}, \\
|z^n - 1|^2 &= |z^m - 1|^2, \\
|z^n - 1| &= |z^m - 1|.
\end{aligned}
$$

Nech r, s sú zvyšky, ktoré dávajú m, n po delení k. Keďže $z^k = 1$, zrejme $z^m = z^r$ a $z^n = z^s$. Pre ktoré čísla $r, s \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$ majú komplexné čísla $z^r - 1$, $z^s - 1$ rovnakú absolútnu hodnotu? Prvou možnosťou samozrejme je, že $r = s$. V takom prípade dávajú m a n rovnaký zvyšok po delení k, teda $k \mid m - n$. Zaoberajme sa ďalej len prípadom $r \neq s$. Čísla z^r, z^s ležia v komplexnej rovine na jednotkovej kružnici so stredom v 0 (obr. 7), takže $z^r - 1$, $z^s - 1$ ležia na jednotkovej kružnici so stredom v -1. Aby mali dve rôzne čísla na tejto kružnici rovnakú absolútnu hodnotu, musia byť rovnako vzdialené od 0, čo zrejme nastáva jedine v prípade, keď $z^r - 1$, $z^s - 1$ sú navzájom komplexne združené, t. j. keď $r + s = k$ (obr. 9). V tomto prípade teda $k \mid m + n$.



Obr. 9