2009/2010
59. ročník MO *Zadania úloh krajského kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala v utorok 19. januára 2010.*)

1. Dokážte, že rovnica $x^2 + p|x| = qx - 1$ s reálnymi parametrami p, q má v obore reálnych čísel štyri riešenia práve vtedy, keď platí $p + |q| + 2 < 0$. (*Jaromír Šimša*)

2. Daný je rovnobežník $ABCD$ s tupým uhlom ABC. Na jeho uhlopriečke AC v polrovine BDC zvoľme bod P tak, aby platilo $|\measuredangle BPD| = |\measuredangle ABC|$. Dokážte, že priamka CD je dotyčnicou ku kružnici opísanej trojuholníku BCP práve vtedy, keď úsečky AB a BD sú zhodné. (*Jaroslav Švrček*)

3. Určte všetky celé kladné čísla m, n také, že n delí $2m - 1$ a m delí $2n - 1$. (*Tomáš Szaniszlo*)

4. V ľubovoľnom trojuholníku ABC označme O stred kružnice vpísanej, P stred kružnice pripísanej ku strane BC a D priesečník osi uhla CAB so stranou BC. Dokážte, že platí

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|}.$$

(Kružnica pripísaná ku strane BC je taká kružnica, ktorá sa dotýka jednak strany BC, jednak oboch polpriamok opačných k polpriamkam BA a CA.) (*Pavel Leischner*)