2006/2007
56. ročník MO *Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

1. *Nájdite všetky mnohočleny P s reálnymi koeficientmi, pre ktoré rovnosť*

$$P(x^2) = P(x) \cdot P(x+2)$$

platí pre ľubovoľné reálne číslo x. (Pavel Calábek)

Riešenie. Konštantný mnohočlen $P(x) = c$ vyhovuje práve vtedy, keď $c = c^2$, mnohočleny $P(x) = 0$ a $P(x) = 1$ sú teda riešením úlohy.

Ukážme teraz, že jediný vyhovujúci mnohočlen P kladného stupňa n je tvaru $P(x) = (x-1)^n$. Uvedený mnohočlen je vzhľadom na identitu $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ zrejme riešením pre každé $n \geqq 1$.

Ak je ax^n $(a \neq 0)$ vedúci člen mnohočlena $P(x)$ kladného stupňa n, je ax^{2n} vedúci člen mnohočlena $P(x^2)$ a a^2x^{2n} vedúci člen mnohočlena $P(x)P(x+2)$. Pokiaľ P vyhovuje danej rovnosti, dostávame porovnaním príslušných členov $a = a^2$, teda $a = 1$. Preto možno mnohočlen P zapísať v tvare $P(x) = (x-1)^n + Q(x)$, kde Q je buď nulový mnohočlen, alebo je Q nenulový mnohočlen stupňa k, pričom $0 \leqq k < n$. Porovnaním mnohočlenov

$$P(x^2) = (x^2-1)^n + Q(x^2),$$
$$P(x)P(x+2) = [(x-1)^n + Q(x)][(x+1)^n + Q(x+2)]$$

obdržíme (po roznásobení a zrušení mocniny $(x^2-1)^n$ na oboch stranách) rovnosť

$$Q(x^2) = (x-1)^n Q(x+2) + (x+1)^n Q(x).$$

Vidíme, že nulový mnohočlen Q vzťah spĺňa. Pre nenulový mnohočlen Q stupňa $k < n$ je však $Q(x^2)$ mnohočlen stupňa $2k$, zatiaľ čo na pravej strane odvodeného vzťahu je mnohočlen stupňa $n+k$ (jeho vedúci člen je $2bx^{n+k}$, ak bx^k je vedúci člen mnohočlena $Q(x)$). Keďže $2k < n+k$, nemôže uvedená rovnosť platiť.

Odpoveď. Úlohe vyhovujú konštantné mnohočleny $P(x) = 0$ a $P(x) = 1$ a pre každé prirodzené n mnohočlen $P(x) = (x-1)^n$.

Iné riešenie. Rovnako ako pri prvom postupe nájdeme riešenia $P(x) = 0$ a $P(x) = 1$. Ďalej sa zaoberajme len nekonštantnými mnohočlenmi. Predpokladajme, že mnohočlen P kladného stupňa n vyhovuje zadaniu. Keďže zadaná rovnosť platí pre všetky reálne čísla x, sú na oboch stranách rovnosti totožné mnohočleny, a teda zadaná rovnosť platí aj pre všetky komplexné čísla x. Nech z je ľubovoľný (komplexný) koreň polynómu P.

Po dosadení $x = z$ do zadanej rovnosti dostaneme $P(z^2) = 0$, teda aj z^2 je koreňom P. Zopakovaním tejto úvahy dostávame, že koreňmi mnohočlena P sú všetky členy postupnosti

$$z, z^2, z^4, z^8, \ldots \tag{1}$$

Keďže P má len konečne veľa (najviac n) rôznych komplexných koreňov, musia sa v postupnosti (1) hodnoty od určitého člena začať opakovať, t. j. $z^k = z^m$ pre nejaké

$k < m$. Odtiaľ buď $z = 0$, alebo $z^{m-k} = 1$. Každý nenulový koreň má teda absolútnu hodnotu 1.

Po dosadení $x = z - 2$ do zadanej rovnosti dostaneme $P((z-2)^2) = 0$, teda aj $(z-2)^2$ je koreňom. Ak $z = 0$, dostávame, že číslo 4 je koreňom, čo je v rozpore s predošlým poznatkom. Takže všetky korene sú nenulové. Nutne teda $|(z-2)^2| = 1$, čiže $|z-2| = 1$. Jediné komplexné číslo s vlastnosťou $|z| = |z-2| = 1$ je $z = 1$. Takže P môže mať jedine koreň 1, čiže $P(x) = a(x-1)^n$. Dosadením do zadanej rovnosti ľahko odvodíme $a = 1$ a overíme, že $P(x) = (x-1)^n$ je riešením pre každé prirodzené n.

---

2. *Nech $a_1 = a_2 = 1$ a $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ pre každé $k \in \mathbb{N}$ (Fibonacciho postupnosť čísel). Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m existuje taký index k, pre ktorý je číslo $a_k^4 - a_k - 2$ deliteľné číslom m.* (Ján Mazák)

Riešenie. Všetky kongruencie a zvyškové triedy v riešení uvažujeme modulo m. Žiadanú kongruenciu $a_k^4 - a_k - 2 \equiv 0$ získame ako dôsledok jednoduchšej kongruencie $a_k \equiv -1$.

Postupnosť zvyškových tried čísel a_k má nasledujúcu vlastnosť: zvyškové triedy ľubovoľných dvoch po sebe idúcich členov a_k, a_{k+1} jednoznačne určujú zvyškové triedy ako všetkých nasledujúcich členov a_i $(i > k+1)$, tak všetkých predchádzajúcich členov a_i $(i < k)$. Odtiaľ zvyčajným postupom, založeným na tom, že všetkých usporiadaných dvojíc zvyškových tried je m^2, teda konečný počet, dostávame, že postupnosť zvyškových tried čísel a_i je periodická, a to hneď od svojho *prvého* člena. Existuje teda číslo $p > 0$ (závislé od daného m) také, že $a_i \equiv a_{i+p}$ pre každý index i. Ak $m \neq 1$ (pre $m = 1$ je tvrdenie úlohy triviálne), zrejme $p > 1$. Keďže $a_1 \equiv a_2 \equiv 1$, platí aj $a_{p+1} \equiv a_{p+2} \equiv 1$, odkiaľ $a_p \equiv 0$ a $a_{p-1} \equiv -1$, takže môžeme zobrať $k = p - 1$ a dôkaz je ukončený.

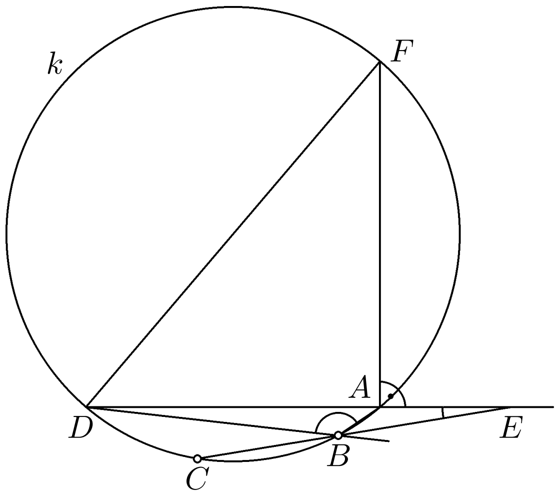
---

3. *Nech k je kružnica opísaná takému konvexnému štvoruholníku $ABCD$, že polpriamky DA a CB sa pretínajú v bode E, pre ktorý platí $|CD|^2 = |AD| \cdot |ED|$. Označme F ($F \neq A$) priesečník kružnice k s priamkou prechádzajúcou bodom A a kolmou na ED. Dokážte, že potom platí: Úsečky AD a CF sú zhodné práve vtedy, keď stred kružnice l opísanej trojuholníku ABE leží na priamke ED.* (Jaroslav Švrček)

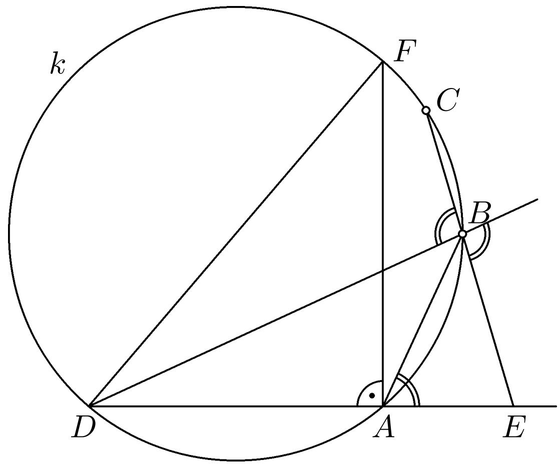
Riešenie. Zrejme DF je priemerom kružnice k. Najskôr ukážeme, že za daných podmienok nemôže bod C ležať v polrovine DFA.

Ak body B, C ležia na časti DA oblúka DAF (obr. 1), sú zrejme uhly DCB a DBA tupé, preto $|DC| < |DB| < |DA| < |DE|$, takže rovnosť $|CD|^2 = |AD| \cdot |ED|$ nemôže platiť. Pre body B, C na časti AF oblúka DAF (obr. 2) je uhol BAE ostrý a pre uhol DBE platí $|\measuredangle DBE| = 180° - |\measuredangle DBC| \leqq 90°$. Takže prípadný ďalší priesečník B' polpriamky DB s kružnicou l nemôže ležať za bodom B. Preto $|DC| > |DB| \geqq |DB'|$. Rovnosť $|CD|^2 = |AD| \cdot |ED|$ teda nemôže platiť, pretože $|AD| \cdot |ED| = |DB| \cdot |DB'|$ vyjadruje mocnosť bodu D ku kružnici l.

Ak bod C neleží v polrovine DFA, platí $|FC| = |DA|$ práve vtedy, keď $DAFC$ je pravouholník, t. j. práve vtedy, keď CA je priemer kružnice k. To je ekvivalentné tomu, že uhol CBA je pravý, a to je ekvivalentné tomu, že trojuholník AEB je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole B, čiže stred kružnice opísanej trojuholníku AEB je stredom úsečky AE.



Obr. 1



Obr. 2

---

4. *Dokážte, že pre každé reálne číslo $p \geqq 1$ možno z množiny reálnych čísel x spĺňajúcich nerovnosti*

$$p < x < \left(2 + \sqrt{p + \frac{1}{4}}\right)^2$$

vybrať štyri navzájom rôzne prirodzené čísla a, b, c, d, pre ktoré platí rovnosť $ab = cd$.

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Čísla $a = (k-1)k$, $b = (k+1)k$, $c = (k-1)(k+1)$, $d = k^2$ zrejme spĺňajú rovnosť $ab = cd$ a nerovnosti $a < c < d < b$ pre každé $k > 1$. Nech teda k je najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré platí $p < a$, čiže $p < (k-1)k$ (pri zadanom p). Ukážme, že pre také k potom platí $b = (k+1)k \leqq p + 4 + 2\sqrt{4p+1}$, čo je zrejme číslo o $\frac{1}{4}$ menšie ako horné ohraničenie intervalu zo zadania, takže tým bude riešenie úlohy úplné.

Podľa výberu čísla k platí $p \geqq (k-2)(k-1)$. Riešením tejto kvadratickej nerovnice dostaneme odhad

$$k \leqq \frac{3}{2} + \sqrt{p + \frac{1}{4}},$$

z ktorého už vyplýva

$$b = (k+1)k \leqq \left(\frac{5}{2} + \sqrt{p + \frac{1}{4}}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} + \sqrt{p + \frac{1}{4}}\right) =$$

$$= \frac{15}{4} + 4\sqrt{p + \frac{1}{4}} + \left(p + \frac{1}{4}\right) = p + 4 + 2\sqrt{4p+1}.$$

---

5. *Zistite, pre ktoré*

$$n \in \{3\,900, 3\,901, 3\,902, 3\,903, 3\,904, 3\,905, 3\,906, 3\,907, 3\,908, 3\,909\}$$

možno množinu $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ rozdeliť na disjunktné trojice tak, aby v každej trojici sa jedno číslo rovnalo súčtu ostatných dvoch čísel.

(*Peter Novotný*)

Riešenie. Z možnosti rozdelenia na disjunktné trojice vyplýva $3 \mid n$. V každej trojici $\{a, b, a+b\}$ je súčet $2(a+b)$, teda párne číslo, preto musí byť párny aj súčet všetkých čísel od 1 do n, súčin $n(n+1)$ musí teda byť deliteľný štyrmi. Celkom máme, že číslo n musí byť tvaru $12k$ alebo $12k+3$, čomu z daných čísel vyhovujú iba $n = 3\,900$ a $n = 3\,903$.

V ďalšom odstavci popíšeme konštrukciu, ako z vyhovujúceho rozkladu pre dané $n = k$ vytvoriť vyhovujúce rozklady pre $n = 4k$ a $n = 4k+3$. To nám zaručí, že rozklady pre $n = 3\,900$ aj $n = 3\,903$ existujú, a to vďaka zostupnej postupnosti

$$3\,900 \to 975 \to 243 \to 60 \to 15 \to 3$$

(namiesto 3 900 možno začať aj číslom 3 903) a vďaka triviálnemu rozkladu pre $n = 3$ (z ktorého postupne zostrojíme rozklady pre $n = 15$, $n = 60$ atď. až pre $n = 3\,900$ resp. $n = 3\,903$).

Z vyhovujúceho rozkladu množiny $\{1, 2, \dots, k\}$ najskôr vyrobíme vyhovujúci rozklad množiny prvých k párnych čísel $\{2, 4, \dots, 2k\}$ (tak, že všetky čísla vo všetkých trojiciach pôvodného rozkladu vynásobíme dvoma). V prípade $n = 4k$ potom zvyšné čísla

$$\{1, 3, 5, \dots, 2k-1, 2k+1, 2k+2, \dots, 4k-1, 4k\}$$

rozdelíme na k trojíc $\{2j-1, 3k-j+1, 3k+j\}$, pričom $j = 1, 2, \dots, k$. Vidno ich v stĺpcoch tabuľky

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2k-3 & 2k-1 \\ 3k & 3k-1 & 3k-2 & \dots & 2k+2 & 2k+1 \\ 3k+1 & 3k+2 & 3k+3 & \dots & 4k-1 & 4k \end{pmatrix}.$$

V prípade $n = 4k+3$ zvyšné čísla

$$\{1, 3, 5, \dots, 2k-1, 2k+1, 2k+2, \dots, 4k+2, 4k+3\}$$

rozdelíme na $k+1$ trojíc $\{2j-1, 3k+3-j, 3k+j+2\}$, pričom $j = 1, 2, \dots, k+1$, tvorených stĺpcami tabuľky

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2k-1 & 2k+1 \\ 3k+2 & 3k+1 & 3k & \dots & 2k+3 & 2k+2 \\ 3k+3 & 3k+4 & 3k+5 & \dots & 4k+2 & 4k+3 \end{pmatrix}.$$

Tým je dôkaz toho, že čísla $n = 3\,900$ a $n = 3\,903$ vyhovujú, ukončený.

---

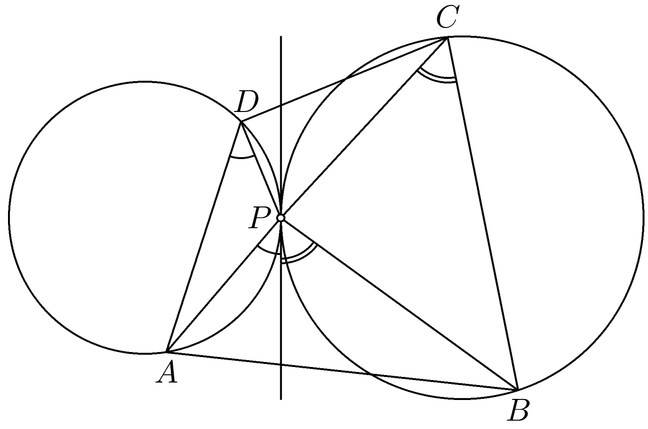
6. *Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Kružnica prechádzajúca bodmi A a D má vonkajší dotyk s kružnicou predchádzajúcou bodmi B a C vo vnútornom bode P uvažovaného štvoruholníka. Predpokladajme, že*

$$|\measuredangle PAB| + |\measuredangle PDC| \leqq 90^\circ \quad a \quad |\measuredangle PBA| + |\measuredangle PCD| \leqq 90^\circ.$$

Dokážte, že potom platí $|AB| + |CD| \geqq |BC| + |AD|$. (*Waldemar Pompe*)

Riešenie. Ak P je spoločný bod spomenutých kružníc, vyplýva z vety o obvodových a úsekových uhloch, že je zároveň aj bodom dotyku práve vtedy, keď (obr. 3)

$$|\measuredangle ADP| + |\measuredangle BCP| = |\measuredangle APB|. \tag{1}$$



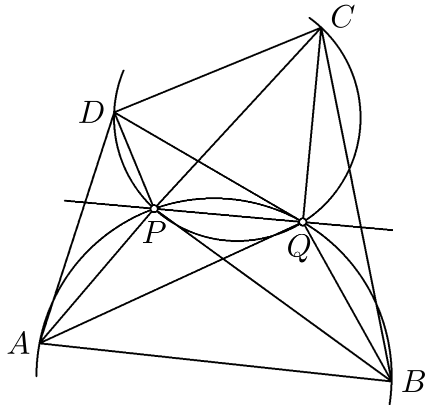
Obr. 3

Uvažujme teraz kružnice opísané trojuholníkom ABP a CDP a predpokladajme, že sa pretínajú ešte v ďalšom bode Q ($Q \neq P$).

Keďže bod A leží zvonka kružnice opísanej trojuholníku BCP, platí $|\measuredangle BCP| + |\measuredangle BAP| < 180°$. Preto aj bod C leží zvonka kružnice opísanej trojuholníku ABP. Analogicky leží aj bod D zvonka tejto kružnice. Odtiaľ vyplýva, že body P a Q ležia na rovnakom oblúku CD kružnice opísanej trojuholníku CDP.

Analogicky body P a Q leží na rovnakom oblúku AB kružnice opísanej trojuholníku ABP. Bod Q teda leží buď vnútri uhla BPC, alebo vnútri uhla APD. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že bod Q leží vnútri uhla BPC (obr. 4). V tom prípade podľa predpokladu úlohy platí

$$|\measuredangle AQD| = |\measuredangle PQA| + |\measuredangle PQD| = |\measuredangle PBA| + |\measuredangle PCD| \leqq 90°. \tag{2}$$



Obr. 4

V tetivových štvoruholníkoch $APQB$ a $DPQC$ sú podľa predpokladu úlohy uhly pri vrcholoch A a D ostré, takže príslušné protiľahlé uhly pri vrchole Q sú tupé. Odtiaľ vyplýva, že bod Q leží nielen vnútri uhla BPC, ale dokonca vnútri trojuholníka BPC, čiže aj vnútri štvoruholníka $ABCD$.

Z vlastností uhlov oboch spomenutých tetivových štvoruholníkov teraz vyplýva

$$|\measuredangle BQC| = |\measuredangle PAB| + |\measuredangle PDC|,$$

takže podľa predpokladu úlohy

$$|\measuredangle BQC| \leqq 90^\circ. \tag{3}$$

Keďže navyše $|\measuredangle PCQ| = |\measuredangle PDQ|$, dostávame podľa (1)

$$\begin{aligned}|\measuredangle ADQ| + |\measuredangle BCQ| &= |\measuredangle ADP| + |\measuredangle PDQ| + |\measuredangle BCP| - |\measuredangle PCQ| = \\ &= |\measuredangle ADP| + |\measuredangle BCP| = |\measuredangle APB|.\end{aligned}$$

A keďže aj $|\measuredangle APB| = |\measuredangle AQB|$, vychádza

$$|\measuredangle ADQ| + |\measuredangle BCQ| = |\measuredangle AQB|.$$

To však znamená, ako už vieme z úvodnej úvahy, že kružnice opísané trojuholníkom BCQ a DAQ sa dotýkajú v bode Q, čo odporuje nášmu počiatočnému predpokladu, že $Q \neq P$. Nezostáva teda iná možnosť ako tá, že obe kružnice opísané trojuholníkom ABP a CDP majú spoločný jediný bod P, pre ktorý podľa nerovností (2) a (3) navyše platí, že uhly APD a BPC nie sú tupé.

Uvažujme teraz polkruhy zostrojené nad stranami BC a DA „dovnútra“ štvoruholníka $ABCD$. Keďže uhly APD a BPC nie sú tupé, leží každý z oboch polkruhov celý vnútri zodpovedajúceho kruhu prislúchajúceho kružnici opísanej trojuholníku BQC, resp. AQD. A keďže sa obe kružnice zvonka dotýkajú, majú aj oba polkruhy zostrojené nad stranami BC a DA najviac jeden spoločný bod. Ak označíme M a N stredy strán BC a DA, vyplýva z toho nerovnosť $|MN| \geqq \frac{1}{2}(|BC| + |DA|)$.

Na druhej strane, zrejme platí $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD})$, takže $|MN| \leqq \frac{1}{2}(|AB|+|CD|)$. Odtiaľ vychádza dokazovaná nerovnosť $|AB| + |CD| \geqq |BC| + |DA|$.