2012/2013
62. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia juniorov*

(*Súťaž sa konala 13. – 16. 5. 2013.*)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. Určte všetky dvojice celých čísel (x, y) spĺňajúcich rovnosť

$$\sqrt{x-\sqrt{y}}+\sqrt{x+\sqrt{y}}=\sqrt{xy}.$$

(...)

I-2. Každé kladné celé číslo chceme natrieť načerveno alebo nazeleno, pričom musia byť splnené nasledujúce podmienky:
- Nech n je ľubovoľné červené číslo. Súčet ľubovoľných n (nie nutne rôznych) červených čísel je červený.
- Nech m je ľubovoľné zelené číslo. Súčet ľubovoľných m (nie nutne rôznych) zelených čísel je zelený.

Určte všetky také ofarbenia. (...)

I-3. Päťuholník $ABCDE$ je vpísaný do kružnice a platí $|AB| = |BC| = |CD|$. Úsečky AC a BE sa pretínajú v bode K, úsečky AD a CE sa pretínajú v bode L. Dokážte, že $|AK| = |KL|$. (...)

I-4. Nájdite najväčšie dvojciferné číslo d s nasledujúcou vlastnosťou: pre každé šesťciferné číslo $\overline{aabbcc}$ platí, že číslo d je deliteľom čísla $\overline{aabbcc}$ práve vtedy, keď d je deliteľom trojciferného čísla $\overline{abc}$. (...)

I-5. Nech M je stred strany AB v ostrouhlom trojuholníku ABC. Pre ľubovoľný bod P vnútri úsečky AB označíme postupne S_1 a S_2 stredy kružníc opísaných trojuholníkom APC a BPC. Dokážte, že stred úsečky S_1S_2 leží na osi úsečky CM. (*Ján Mazák*)

Súťaž družstiev:

T-1. Rozhodnite, či existuje nekonečne veľa prvočísel p, ktoré majú násobok v tvare n^2+n+1 pre nejaké prirodzené číslo n. (*Ján Mazák*)

T-2. Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že súčet troch najväčších deliteľov čísla n je 1457. (*Pavel Novotný*)

T-3. W pewnej grupie jest $n \geqq 5$ osób, przy czym każde dwie osoby, które się nie znają, mają dokładnie jednego wspólnego znajomego oraz żadna osoba nie zna wszystkich pozostałych. Udowodnij, że można 5 spośród danych n osób usadzić przy okrągłym stole tak, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi
a) znajomymi,
b) nieznajomymi. (...)

T-4. W czworokącie wypukłym $ABCD$

$$\measuredangle DAB = \measuredangle ABC = \measuredangle BCD > 90^\circ.$$

Okrąg opisany na trójkącie ABC przecina boki AD i CD odpowiednio w punktach K i L, różnych od wierzchołków czworokąta. Odcinki AL i CK przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że $\measuredangle ADB = \measuredangle PDC$. (...)

T-5. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, pro něž platí $ab + ac + bc \geqq a + b + c$. Dokažte, že

$$a+b+c \geqq 3.$$

(...)

T-6. V rovině je dán čtverec $ABCD$, kde $|AB| = a$. Určete nejmenší možnou hodnotu poloměrů tří shodných kruhů, pomocí nichž je možno pokrýt daný čtverec. (...)