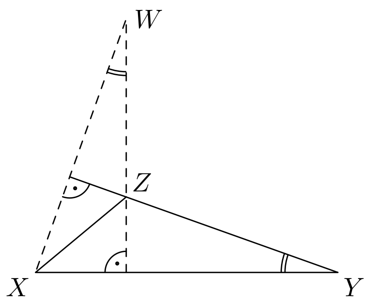
2005/2006
55. ročník MO *Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

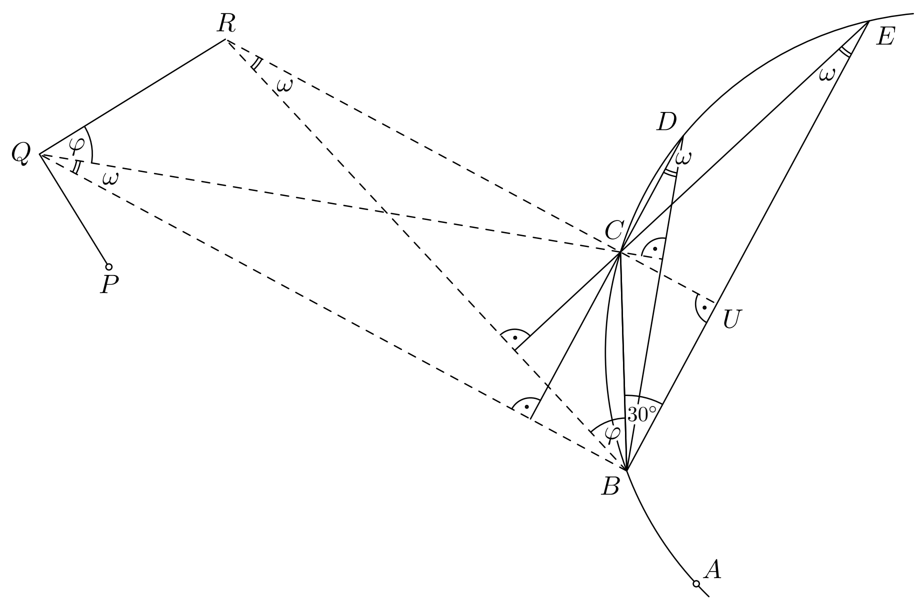
1. *Na kružnici s polomerom r leží 5 rôznych bodov A, B, C, D, E v tomto poradí, pričom platí $|AC| = |BD| = |CE| = r$. Dokážte, že trojuholník, ktorého vrcholy sú ortocentrá trojuholníkov ACD, BCD a BCE, je pravouhlý.* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. V ľubovoľnom tupouhlom trojuholníku XYZ s tupým uhlom pri vrchole Z a ortocentrom W majú uhly XYZ a XWZ rovnakú veľkosť, oba sú totiž doplnkom do 90 stupňov k uhlu YXW (obr. 1). Navyše body Y a W ležia v rôznych polrovinách určených priamkou XZ.



Obr. 1

Označme ortocentrá trojuholníkov zo zadania postupne P, Q, R. Ukážeme, že uhol PQR je pravý. Zrejme všetky tri trojuholníky sú tupouhlé s tupými uhlami pri vrchole C. Body P, Q, R sa teda nachádzajú na predĺženiach výšok z vrcholu C na príslušné strany. Z polohy týchto strán je navyše zrejmé, že polpriamka CQ leží „medzi“ polpriamkami CP a CR, t. j. v uhle PCR. Veľkosť uhla PQR preto môžeme vypočítať ako súčet veľkostí uhlov RQC a PQC (obr. 2). Podľa tvrdenia z úvodného



Obr. 2

odstavca ležia body Q, R v tej istej polrovine určenej priamkou BC a platí

$$|\measuredangle BEC| = |\measuredangle BRC| \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle BDC| = |\measuredangle BQC|.$$

Pritom uhly BEC a BDC majú rovnakú veľkosť, lebo sú obvodovými uhlami nad spoločnou tetivou BC. Preto tiež $|\measuredangle BRC| = |\measuredangle BQC|$ (označme veľkosť týchto uhlov ω) a štvoruholník $BCRQ$ je tetivový (ľahko možno nahliadnuť, že je to rovnoramenný lichobežník, to však potrebovať nebudeme). Uhly RQC a RBC nad tetivou RC majú teda rovnakú veľkosť, ktorú označme φ. Keďže $|EC| = r$, má stredový uhol nad tetivou EC veľkosť $60°$, čiže obvodový uhol EBC má veľkosť $30°$. Ak označíme U pätu výšky na stranu BE v trojuholníku BEC, sčítaním uhlov v pravouhlom trojuholníku BUR dostaneme

$$\omega + \varphi + 30° + 90° = 180°, \qquad \text{t. j.} \qquad |\measuredangle RQC| = \varphi = 60° - \omega = 60° - |\measuredangle BDC|.$$

Zrejme analogicky vieme odvodiť $|\measuredangle PQC| = 60° - |\measuredangle DBC|$. Spolu máme

$$|\measuredangle PQR| = |\measuredangle RQC| + |\measuredangle PQC| = 120° - (|\measuredangle BDC| + |\measuredangle DBC|) = |\measuredangle BCD| - 60° \tag{1}$$

(pri poslednej úprave sme využili, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku BCD je $180°$). Avšak aj tetiva BD má dĺžku rovnú polomeru zadanej kružnice. Obvodový uhol BCD teda prislúcha k vypuklému stredovému uhlu veľkosti $300°$, t. j. má veľkosť $150°$. Podľa (1) potom $|\measuredangle PQR| = 90°$.

---

2. *Okolo okrúhleho stola sedí n detí. Erika je z nich najstaršia a má n cukríkov. Ostatné deti nemajú žiadne cukríky. Erika sa rozhodla, že cukríky rozdelí a stanovila nasledovné pravidlá. V každom kole zdvihnú ruky všetky deti, ktoré majú pri sebe aspoň dva cukríky. Erika jedného z prihlásených vyberie a ten dá každému svojmu susedovi jeden cukrík. (V prvom kole sa teda prihlási iba Erika a dá svojim dvom susedom po cukríku.) Zistite, pre ktoré $n \geqq 3$ môže delenie po konečnom počte kôl skončiť tak, že každé dieťa bude mať práve jeden cukrík.* (Peter Novotný)

Riešenie. Najprv ukážeme, že pre párne n delenie nikdy nemôže skončiť tak, že každé dieťa bude mať jeden cukrík. V každom kole sa poloha zmení len dvom cukríkom, pričom sa posunú „opačným smerom“. To nás navádza skúmať, ako sa mení celkový súčet vzdialeností cukríkov od daného dieťaťa, povedzme od Eriky. Označme jednotlivé stoličky v smere hodinových ručičiek číslami od 0 po $n-1$ podľa vzdialenosti (v tomto smere) od Eriky. Po každom kole spočítajme súčet vzdialeností všetkých cukríkov od Eriky a označme ho S (t. j. s každým cukríkom pripočítame do S číslo stoličky, na ktorej sedí jeho aktuálny majiteľ). Ak v danom kole vyberie Erika dieťa na stoličke s číslom k, pričom $1 \geqq k \geqq n-2$, hodnota S sa nezmení – namiesto $2k$ započítame v súčte $(k-1) + (k+1)$. Ak vyberie dieťa na stoličke s číslom $n-1$, v S namiesto $2(n-1)$ započítame $(n-2) + 0$, hodnota súčtu sa teda zmenší o n. Napokon, ak vyberie seba, namiesto $2 \cdot 0$ započítame $(n-1)+1$ a hodnota S sa o n zväčší. Keďže na začiatku je $S = 0$ a meniť sa môže iba o hodnotu $\pm n$, ostane S po každom kole deliteľné číslom n, t. j. S/n bude stále celé číslo. Avšak v prípade, že by každé dieťa držalo práve jeden cukrík, mali by sme

$$S = 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad \text{čiže} \qquad \frac{S}{n} = \frac{n-1}{2},$$

čo pre párne hodnoty n nie je celé číslo. Taká situácia teda nastať nemôže.

Venujme sa teraz nepárnym hodnotám n. Ukážeme, že existuje delenie, ktoré skončí tak, že každé dieťa má práve jeden cukrík. Nech $n = 2k+1$. Vhodné delenie zostrojíme indukciou; presnejšie, dokážeme, že pre každé $i = 0, 1, \dots, k$ vieme dostať pozíciu, že Erika má $n-2i$ cukríkov a prvých i detí sediacich od nej naľavo a takisto prvých i detí napravo má po jednom cukríku. Hodnota $i = 0$ predstavuje začiatok delenia, hodnota $i = 1$ stav po prvom kole (a teda prvý indukčný krok) a hodnota $i = k$ stav, keď každý má jeden cukrík. Predpokladajme, že sa nám podarilo dostať sa do popísanej pozície pre nejakú hodnotu $i = m$, pričom $1 \leqq m < k$ (a prešli sme pritom všetkými pozíciami pre $i < m$). Z tejto situácie postupujme nasledovne. Najprv Erika dá po cukríku dvom svojim susedom (keďže $m < k$, má aspoň tri cukríky a môže to urobiť). Ďalšie kolá sú znázornené v schéme. (Čísla znamenajú počty cukríkov u Eriky a detí napravo od nej, naľavo postupujeme súčasne a symetricky.)

$$\underline{n-2m}, \underbrace{1,\dots,1}_{m}, 0, \dots \;\to\; n-2m-2, \underline{2}, \underbrace{1,\dots,1}_{m-1}, 0, \dots \;\to\; n-2m, 0, \underline{2}, \underbrace{1,\dots,1}_{m-2}, 0, \dots \;\to$$

$$\to\; n-2m, 1, 0, \underline{2}, \underbrace{1,\dots,1}_{m-3}, 0, \dots \;\to\; n-2m, 1, 1, 0, \underline{2}, \underbrace{1,\dots,1}_{m-4}, 0, \dots \;\to\; \dots$$

$$\dots \;\to\; n-2m, \underbrace{1,\dots,1}_{m-2}, 0, \underline{2}, 0, \dots \;\to\; n-2m, \underbrace{1,\dots,1}_{m-1}, 0, 1, 0, \dots$$

Dostali sme sa tak do pozície, keď Erika má $n-2m$ cukríkov, prvých $m-1$ detí napravo aj naľavo má po jednom cukríku, m-té dieťa po oboch stranách nemá žiadny cukrík a deti vzdialené o $m+1$ miest majú po jednom cukríku. Aby sme dosiahli pozíciu pre $i = m + 1$, stačí doplniť cukríky práve deťom na miestach vzdialených o m od Eriky. Na to však môžeme využiť indukčný predpoklad. Ak si totiž odmyslíme cukríky u detí vzdialených o $m + 1$ miest, dostaneme pozíciu pre $i = m - 1$ (len Erika má o dva cukríky menej, avšak stále ich má aspoň tri, teda vieme robiť tie isté kroky). Z nej sa už vieme dostať do situácie pre $i = m$. Keď vrátime späť odmyslené cukríky, dostaneme pozíciu pre $i = m + 1$.

Nakoniec sa nám preto podarí dosiahnuť aj pozíciu pre $i = k$, t. j. pre nepárne n delenie môže skončiť tak, že každé dieťa má práve jeden cukrík.

Poznámky. Pre párne n, ktoré nie je deliteľné štyrmi, možno tvrdenie, ktoré sme dokázali v úvode riešenia, dokázať jednoduchšie. V takom prípade totiž môžeme stoličky, na ktorých deti sedia, striedavo ofarbiť bielou a čiernou farbou. Je zrejmé, že parita počtu cukríkov u všetkých detí na bielych stoličkách (ktorých je pre n daného tvaru nepárne veľa) sa nemení. Na začiatku je táto hodnota párna, zatiaľ čo v situácii, keď by každé dieťa malo práve jeden cukrík, by bola nepárna. Preto sa nemožno do takej situácie dostať.

Dá sa ukázať, že v prípade nepárneho n delenie dokonca vždy musí (bez ohľadu na to, ako deti vyberáme) po konečnom počte krokov skončiť tak, že každé dieťa má práve jeden cukrík. Ak $n = 2k + 1$, počet kôl, po ktorom to nastane, je vždy $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2$.

---

3. *Súčet štyroch reálnych čísel sa rovná 9, súčet ich druhých mocnín sa rovná 21. Dokážte, že dané čísla možno označiť a, b, c a d tak, aby platila nerovnosť $ab - cd \geqq 2$.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Označme dané čísla p, q, r, s tak, aby $p \geqq q \geqq r \geqq s$. Uvažujme najskôr prípad $p + q \geqq 5$. Potom

$$p^2 + q^2 + 2pq \geqq 25 = 4 + (p^2 + q^2 + r^2 + s^2) \geqq 4 + p^2 + q^2 + 2rs,$$

odkiaľ máme $pq - rs \geqq 2$.

Predpokladajme teda, že $p + q < 5$; potom

$$4 < r + s \leqq p + q < 5. \tag{1}$$

Všimnime si, že

$$(pq + rs) + (pr + qs) + (ps + qr) = \frac{(p + q + r + s)^2 - (p^2 + q^2 + r^2 + s^2)}{2} = 30.$$

Navyše

$$pq + rs \geqq pr + qs \geqq ps + qr,$$

pretože $(p - s)(q - r) \geqq 0$ a $(p - q)(r - s) \geqq 0$.

Odtiaľ dostávame, že $pq + rs \geqq 10$. Z (1) vyplýva $0 \leqq (p + q) - (r + s) < 1$, takže

$$(p + q)^2 - 2(p + q)(r + s) + (r + s)^2 < 1.$$

Keď túto nerovnosť pripočítame k zrejmej rovnosti $(p + q)^2 + 2(p + q)(r + s) + (r + s)^2 = 9^2$, dostaneme

$$(p + q)^2 + (r + s)^2 < 41.$$

Preto

$$41 = 21 + 2 \cdot 10 \leqq (p^2 + q^2 + r^2 + s^2) + 2(pq + rs) = (p + q)^2 + (r + s)^2 < 41,$$

čo je spor.

Iné riešenie. Z rovnosti $a + b + c + d = 9$ pri usporiadaní $a \geqq b \geqq c \geqq d$ najskôr vyplýva, že aritmetické priemery dvojíc čísel a, b, resp. c, d majú vyjadrenie

$$\frac{a + b}{2} = \frac{9}{4} + \varepsilon_1, \qquad \frac{c + d}{2} = \frac{9}{4} - \varepsilon_1$$

pre vhodné $\varepsilon_1 \geqq 0$. Odtiaľ zasa vyplýva vyjadrenie čísel a, b, c, d v tvare

$$a = \frac{9}{4} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad b = \frac{9}{4} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \qquad c = \frac{9}{4} - \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \quad d = \frac{9}{4} - \varepsilon_1 - \varepsilon_3$$

pre vhodné $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \geqq 0$. Nerovnosť $b \geqq c$ znamená, že

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \geqq -\varepsilon_1 + \varepsilon_3, \qquad \text{čiže} \qquad \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leqq 2\varepsilon_1.$$

Z rovnosti

$$\begin{aligned} 21 = (a^2+b^2) + (c^2+d^2) &= 2 \cdot \left(\frac{9}{4} + \varepsilon_1\right)^2 + 2\varepsilon_2^2 + 2 \cdot \left(\frac{9}{4} - \varepsilon_1\right)^2 + 2\varepsilon_3^2 = \\ &= 4 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 + 4\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_3^2 = 20 + \frac{1}{4} + 2 \cdot (2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \end{aligned}$$

zistíme, že nezáporné čísla ε_i spĺňajú vzťah

$$2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \frac{3}{8}. \tag{2}$$

Vzhľadom na nerovnosti $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leqq 2\varepsilon_1$ a $\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \leqq (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2$ vyplýva z (2) odhad

$$\frac{3}{8} \leqq 2\varepsilon_1^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 \leqq 2\varepsilon_1^2 + 4\varepsilon_1^2 = 6\varepsilon_1^2,$$

odkiaľ $\varepsilon_1^2 \geqq (1/6) \cdot (3/8) = 1/16$, čiže $\varepsilon_1 \geqq 1/4$. Pre skúmaný výraz $ab - cd$ platí

$$ab - cd = \left(\frac{9}{4} + \varepsilon_1\right)^2 - \varepsilon_2^2 - \left(\frac{9}{4} - \varepsilon_1\right)^2 + \varepsilon_3^2 = 9\varepsilon_1 - \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2.$$

Ak za ε_2^2 dosadíme vyjadrenie z (2), dostaneme

$$ab - cd = 9\varepsilon_1 - \left(\frac{3}{8} - 2\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2\right) + \varepsilon_3^2 = 9\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1^2 - \frac{3}{8} + 2\varepsilon_3^2 \geqq 9 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{8} = 2.$$

Tým je tvrdenie dokázané.

---

4. *Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $k \geqq 1$ existuje také prirodzené číslo n, že v zápise čísla 2^n v desiatkovej sústave sa nachádza blok práve k za sebou idúcich núl, t. j.*

$$2^n = \ldots a\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ núl}}b\ldots,$$

pričom cifry a, b sú nenulové. (*Peter Novotný*)

Riešenie. Najskôr ukážeme, že v zápisoch mocnín čísla 2 sa nachádzajú ľubovoľne dlhé bloky núl. Aby v zápise čísla 2^n bolo *aspoň* k núl, musí sa dať zapísať v tvare $y \cdot 10^{m+k} + z$, pričom y, z sú prirodzené a z má najviac m cifier, t. j. $z < 10^m$. Stačí teda nájsť také n a m, aby zvyšok čísla 2^n po delení číslom 10^{m+k} bol menší ako 10^m. Podľa Eulerovej vety pre každé prirodzené t platí

$$2^{\varphi(5^t)} \equiv 1 \pmod{5^t}.$$

(Využili sme, že $(2, 5^t) = 1$.) Vynásobením tejto kongruencie číslom 2^t dostaneme

$$2^{t+\varphi(5^t)} \equiv 2^t \pmod{10^t}, \qquad \text{čiže} \qquad 2^{t+\varphi(5^t)} = y \cdot 10^t + 2^t$$

pre nejaké prirodzené y. Podľa predošlých úvah zvoľme $n = t + \varphi(5^t)$ a $m = t - k$. Pritom t musí mať takú hodnotu, aby bolo $2^t < 10^{t-k}$. Také t určite existuje, stačí zobrať napríklad $t = 2k$ (lebo $2^{2k} = 4^k < 10^k$). Z uvedeného vyplýva, že v čísle

$$2^{2k+\varphi(5^{2k})} = y \cdot 10^{2k} + 2^{2k}$$

sa nachádza blok aspoň k núl.

Zoberme teda pre dané k takú mocninu dvoch (označme ju 2^n), ktorá obsahuje blok práve r núl, pričom $r \geqq k$. Skúmajme, čo sa s blokom deje, keď zoberieme nasledujúce mocniny, t. j. keď číslo s blokom postupne násobíme dvoma. Keďže pre nejaké nenulové cifry a, b máme

$$2^n = \underbrace{\ldots a}_{y}\underbrace{00\ldots0}_{r \text{ núl}}\underbrace{b\ldots}_{z} = y \cdot 10^{r+s} + z,$$

dostaneme $2^{n+1} = 2y \cdot 10^{r+s} + 2z$. Pritom číslo $2z$ má zrejme buď rovnako veľa cifier ako z, alebo o jednu viac. Z „pravej strany“ sa teda blok núl buď neskráti, alebo skráti o jedna. Z „ľavej strany“ sa blok môže predĺžiť (ak y je deliteľné piatimi). Celkovo sa tak dĺžka bloku buď zmenší o jedna, alebo sa nezmení, alebo sa zväčší. Rovnako keď budeme násobiť dvoma ďalej, dĺžka bloku sa v každom kroku zmenší najviac o jedna. Teda jediná možnosť, ako by sme sa mohli vyhnúť bloku dĺžky k, je, že blok bude mať stále dĺžku viac ako k. To však nie je možné. Totiž y má vo svojom prvočíselnom rozklade číslo 5 s nejakým exponentom, povedzme α. Keď 2^n vynásobíme dvoma α-krát, pri ďalšom násobení sa už blok zrejme „zľava“ predlžovať nebude. A „sprava“ sa blok minimálne po každom štvrtom násobení skráti (keďže $2^4 > 10$). Po dostatočnom počte krokov teda dostaneme mocninu čísla 2, ktorá obsahuje blok práve k núl.

---

5. *Zistite, koľko existuje postupností celých čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ takých, že pre každé prirodzené číslo n platí*

$$a_n \neq -1 \qquad \text{a} \qquad a_{n+2} = \frac{a_n + 2\,006}{a_{n+1} + 1}.$$

(*Peter Novotný*)

Riešenie. Každá postupnosť spĺňajúca podmienky zadania je určená prvými dvoma členmi – všetky ďalšie vieme pomocou rekurentného vzťahu vypočítať. Hľadáme teda také dvojice (a_1, a_2), že všetky ostatné členy sú celé čísla. Napíšme zadaný vzťah pre niekoľko malých hodnôt n. Po roznásobení zlomkov dostaneme

$$\begin{aligned} a_3(a_2+1) &= a_1 + 2\,006,\\ a_4(a_3+1) &= a_2 + 2\,006,\\ a_5(a_4+1) &= a_3 + 2\,006,\\ &\vdots \end{aligned}$$

Odčítajme susedné rovnosti, aby sme sa zbavili čísla 2 006. Po preusporiadaní členov získame rovnosti

$$\begin{aligned} a_3 - a_1 &= (a_3+1)(a_4-a_2),\\ a_4 - a_2 &= (a_4+1)(a_5-a_3),\\ a_5 - a_3 &= (a_5+1)(a_6-a_4),\\ &\vdots \end{aligned} \tag{1}$$

Keďže podľa zadania sú všetky zátvorky $(a_n + 1)$ nenulové, môžu nastať dve možnosti. Ak $a_3 - a_1 = 0$, postupným dosadzovaním do predošlých rovností dostaneme aj $a_4 - a_2 = 0$, $a_5 - a_3 = 0$, …, t. j.

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots \qquad \text{a} \qquad a_2 = a_4 = a_6 = \ldots \tag{2}$$

Na druhej strane, ak $a_3 - a_1 \neq 0$, rovnakým dosadzovaním odvodíme $a_4 - a_2 \neq 0$, $a_5 - a_3 \neq 0$, … Venujme sa najprv druhej možnosti. Z rovností (1) máme pre každé $n \geqq 1$ vzťah

$$0 < |a_{n+3} - a_{n+1}| = |a_{n+2} - a_n| \cdot \frac{1}{|a_{n+2}+1|} \leqq |a_{n+2} - a_n|. \tag{3}$$

Dostávame tak nerastúcu postupnosť kladných celých čísel

$$|a_3 - a_1| \geqq |a_4 - a_2| \geqq |a_5 - a_3| \geqq \ldots$$

Táto postupnosť je zrejme od určitého člena konštantná (inak by sme z nej vedeli vybrať nekonečnú klesajúcu postupnosť kladných celých čísel, čo je nemožné). Existuje teda taký index N a hodnota d, že pre $n \geqq N$ je $|a_{n+2} - a_n| = d$. Podľa (3) potom $|a_{n+2} + 1| = 1$, t. j. pre $n \geqq N + 2$ máme $a_n \in \{0, -2\}$. Avšak podľa zadania

$$a_{N+4} = \frac{a_{N+2} + 2\,006}{a_{N+3} + 1},$$

čiže a_{N+4} nadobúda jednu z hodnôt

$$\frac{0 + 2\,006}{0+1} = 2\,006, \qquad \frac{0 + 2\,006}{-2+1} = -2\,006, \qquad \frac{-2 + 2\,006}{0+1} = 2\,004, \qquad \frac{-2 + 2\,006}{-2+1} = -2\,004,$$

čo je v spore s tým, že $a_{N+4} \in \{0, -2\}$. V tomto prípade žiadna postupnosť podmienkam zadania nevyhovuje.

Každá vyhovujúca postupnosť preto spĺňa (2). Dosadením $n = 1$ a $a_3 = a_1$ do zadanej rovnosti dostaneme

$$a_1 = \frac{a_1 + 2\,006}{a_2 + 1}, \qquad \text{čiže} \qquad a_1 a_2 = 2\,006 = 2 \cdot 17 \cdot 59.$$

Berúc do úvahy $a_1, a_2 \neq -1$ dostávame

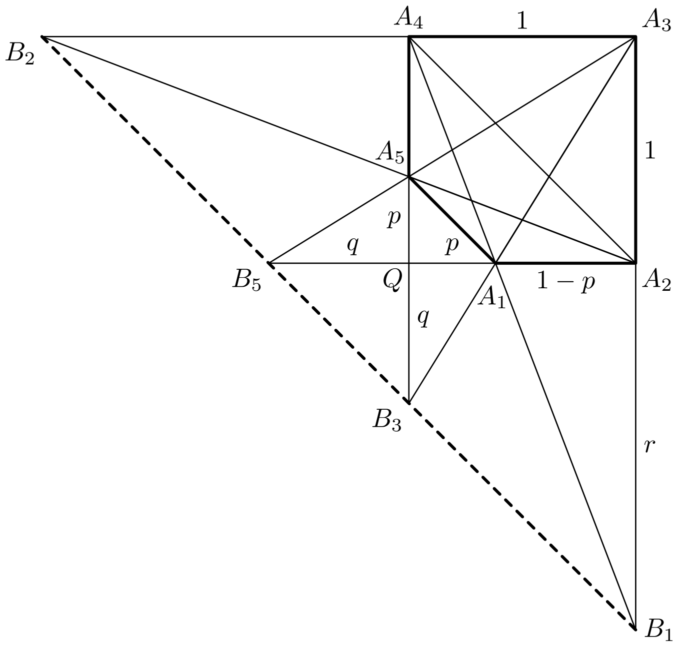
$$a_1 \in \{1, \pm 2, \pm 17, \pm 34, \pm 59, \pm 118, \pm 1\,003, 2\,006\} \qquad \text{a} \qquad a_2 = \frac{2\,006}{a_1}.$$

Ľahko overíme, že každá takáto postupnosť $a_1, a_2, a_1, a_2, a_1, \dots$ spĺňa podmienky zadania. Hľadaných postupností je teda 14.

---

6. *Zistite, či existuje taký konvexný päťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5$, že pre každé $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sú priamky A_iA_{i+3}, $A_{i+1}A_{i+2}$ rôznobežné a pretínajú sa v bode B_i, pričom body B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ležia na jednej priamke. (Uvažujeme $A_6 = A_1$, $A_7 = A_2$ a $A_8 = A_3$.)* (*Waldemar Pompe*)

Riešenie. Skúsme päťuholník s popísanými vlastnosťami nájsť. Prekážkou je, že päťuholníky osovo súmerné podľa nejakej osi (pri ktorých by mohlo byť manuálne jednoduchšie ukázať, že popísané body ležia na jednej priamke) majú vždy aspoň jednu dvojicu priamok A_iA_{i+3}, $A_{i+1}A_{i+2}$ rovnobežnú. Zadajme si preto na začiatok jednoduchšiu úlohu – nájdime taký päťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5$, že iba štyri z bodov B_i budú ležať na jednej priamke. Tu si už môžeme dovoliť hľadať ho medzi osovo súmernými päťuholníkmi. Aby sme situáciu ešte zjednodušili, povedzme, že body A_2, A_3, A_4 budú vrcholmi štvorca $QA_2A_3A_4$ so stranou dĺžky 1 a body A_1, A_5 budú ležať postupne na stranách QA_2 a QA_4 vo vzdialenosti p od vrcholu Q (obr. 3). Zo symetrickosti (päťuholník je osovo súmerný podľa osi QA_3) je zrejmé, že priamky



Obr. 3

B_1B_2, B_3B_5 sú rovnobežné. Poľahky možno vypozorovať, že v prípade, keď p nadobúda malé hodnoty, t. j. keď body A_1, A_5 sú blízko bodu Q, nachádza sa priamka B_3B_5 bližšie k bodu Q ako priamka B_1B_2. Naopak, keď p nadobúda hodnoty blízke 1, body A_1, A_5 sú blízko bodov A_2, A_4 a priamka B_1B_2 je k bodu Q bližšie, prípadne dokonca na opačnej strane, ako priamka B_3B_5. Dá sa preto očakávať, že pre nejakú hodnotu $p \in (0,1)$ sú obe priamky totožné a body B_1, B_2, B_3, B_5 ležia na jednej priamke. Nájdime také p.

Označme $|B_5Q| = |B_3Q| = q$ a $|B_1A_2| = r$. Z podobnosti trojuholníkov B_5QA_5 a $B_5A_2A_3$ máme

$$\frac{q}{p} = \frac{q+1}{1}, \qquad \text{čiže} \qquad q = \frac{p}{1-p}.$$

Z podobnosti trojuholníkov $B_1A_2A_1$ a $B_1A_3A_4$ máme

$$\frac{r}{1-p} = \frac{r+1}{1}, \qquad \text{čiže} \qquad r = \frac{1-p}{p}.$$

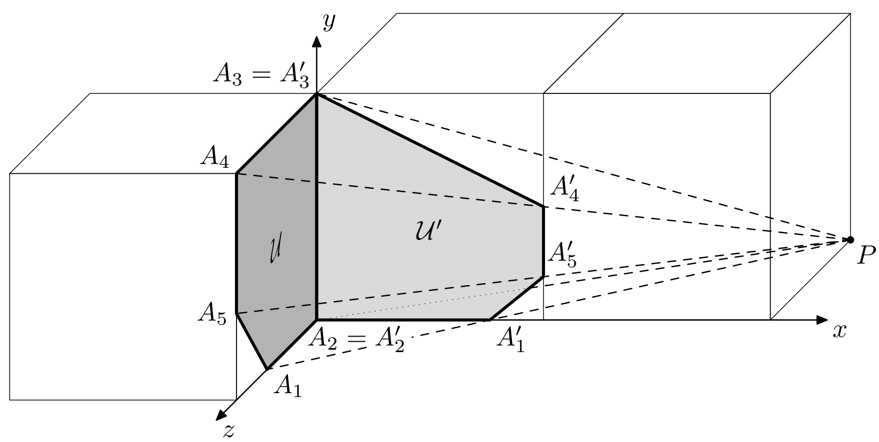
Napokon na to, aby bod B_1 ležal na priamke B_3B_5, stačí, aby boli podobné trojuholníky B_5QB_3 a $B_5A_2B_1$. To platí vtedy, keď

$$\frac{q}{q} = \frac{q+1}{r}, \qquad \text{čiže} \qquad q+1 = r.$$

Po dosadení predošlých vzťahov dostaneme rovnicu

$$\frac{p}{1-p} + 1 = \frac{1-p}{p},$$

ktorej jednoduchou úpravou získame kvadratickú rovnicu $p^2 - 3p + 1 = 0$. Tá má v intervale $(0,1)$ jediné riešenie $p = (3-\sqrt{5})/2$. (Zaujímavé je všimnúť si, že pre dané p je pomer, v ktorom rozdeľuje A_1 úsečku QA_2, zlatý rez.) Pre túto hodnotu teda body B_1, B_3, B_5, B_2 ležia na jednej priamke. Navyše priamky A_1A_5 a A_2A_4 (ktoré, keby neboli rovnobežné, pretínali by sa v bode B_4) sú s ňou rovnobežné. V istom zmysle sa teda tieto tri priamky pretínajú „v nekonečne" v „bode" B_4 a všetky body B_i ležia na jednej priamke. Aby sme vyhoveli podmienkam zadania, stačí nájsť vhodné zobrazenie, ktoré „bod z nekonečna" zobrazí na konkrétny bod (a zachová všetky ostatné potrebné vlastnosti, t. j. zobrazí priamky na priamky). Takým zobrazením bude premietnutie (obr. 4). Uvažujme štandardnú kartezián-

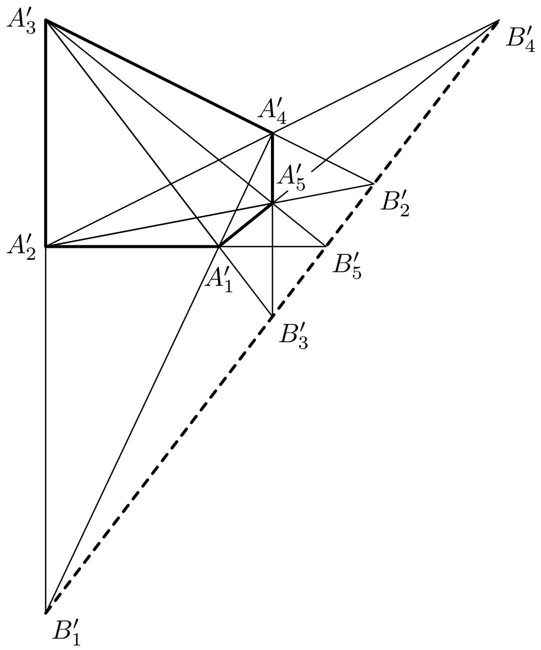


Obr. 4

sku sústavu súradníc v priestore. Päťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5 = \mathcal{U}$ vložme do roviny $\mathcal{O}_{yz}$ s bodom A_2 v počiatku a s bodmi A_1, A_3 postupne na kladných osiach z, y. Zvoľme ako premietací bod napríklad bod $P \equiv (2,0,-1)$. Každá priamka PA_i pretne rovinu $\mathcal{O}_{xy}$ v bode, ktorý označíme A_i'. Dostaneme tak päťuholník $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5' = \mathcal{U}'$. Priamo z vlastností použitého zobrazenia vyplýva, že $\mathcal{U}'$ spĺňa podmienky zadania. O tom sa môžeme presvedčiť aj výpočtom. Ľahko totiž možno spočítať, že v rovine $\mathcal{O}_{xy}$ majú jednotlivé body súradnice

$$A_1' \equiv (3-\sqrt{5}, 0), \quad A_2' \equiv (0,0), \quad A_3' \equiv (1,0), \quad A_4' \equiv (1, \tfrac{1}{2}), \quad A_5' \equiv (1, \tfrac{3-\sqrt{5}}{4})$$

a následne overiť, že príslušné body B'_1, B'_2, B'_3, B'_4, B'_5 ležia na jednej priamke (obr. 5).



Obr. 5

Poznámka. Úlohu možno riešiť aj bez konštruovania takého päťuholníka, že štyri z bodov B_i ležia na jednej priamke. Za premietaný útvar $\mathcal{U}$ stačí zabrať pravidelný päťuholník. Ten má totiž všetky dvojice priamok A_iA_{i+3}, $A_{i+1}A_{i+2}$ rovnobežné; po vhodnom premietnutí budú teda priesečníky B'_i ležať v množine, ktorá pri danom premietaní nemá vzor. Takou množinou je však priamka.