2004/2005
54. ročník MO *Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

---

1. *Nech n je dané prirodzené číslo. V obore nezáporných reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc*

$$x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \cdots + x_n^n = n,$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

s neznámymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Riešenie. Predpokladajme, že $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú riešením zadanej sústavy. Premiestnením všetkých členov na ľavú stranu a odčítaním druhej rovnice od prvej dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \cdots + x_n^n - n - (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n - \tfrac{1}{2}n(n+1)) = \\ &= (x_2^2 - 2x_2 + 2 - 1) + (x_3^3 - 3x_3 + 3 - 1) + \cdots + (x_n^n - nx_n + n - 1). \qquad (1) \end{aligned}$$

Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom pre $k \geqq 2$ a $x \geqq 0$ platí

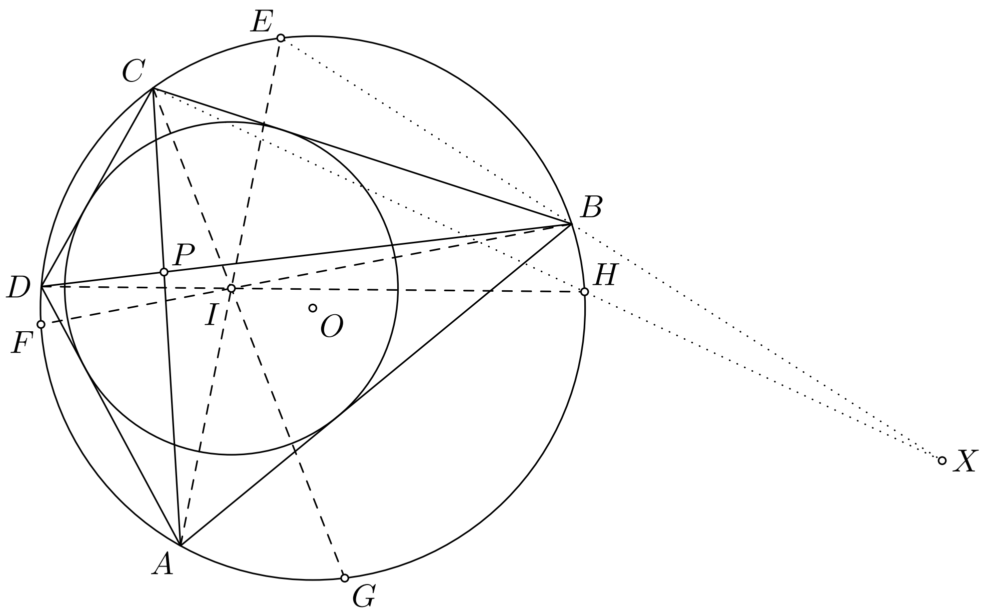
$$x^k + k - 1 = x^k + 1 + 1 + \cdots + 1 \geqq k \cdot \sqrt[k]{x^k} = kx,$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x = 1$. Každá zo zátvoriek v (1) je teda nezáporná a súčet týchto zátvoriek bude nulový len v prípade, keď $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1$. Z prvej rovnice sústavy potom nutne vyplýva, že $x_1 = 1$. Skúškou ľahko overíme, že uvedená n-tica je (jediným) riešením.

---

2. *Konvexný štvoruholník $ABCD$ je vpísaný do kružnice so stredom O a opísaný kružnici so stredom I. Uhlopriečky AC a BD sa pretínajú v bode P. Dokážte, že body O, I a P ležia na jednej priamke.*

Riešenie. Označme priesečníky priamok AI, BI, CI, DI s kružnicou opísanou štvoruholníku $ABCD$ postupne E, F, G, H (obr. 1). Keďže priamky AI, BI, CI, DI sú osi príslušných vnútorných uhlov štvoruholníka $ABCD$, priamky EG a FH sú priemery kružnice opísanej štvoruholníku $ABCD$ a teda sa pretínajú v bode O. Označme X priesečník priamok EB a CH. Podľa Pascalovej vety pre „šesťuholník“ $ACHDBE$ ležia body P, X a I na jednej priamke. Podobne podľa Pascalovej vety pre „šesťuholník“ $GCHFBE$ ležia na jednej priamke body O, X a I. Preto ležia na jednej priamke aj body O, I a P, čo sme chceli dokázať.

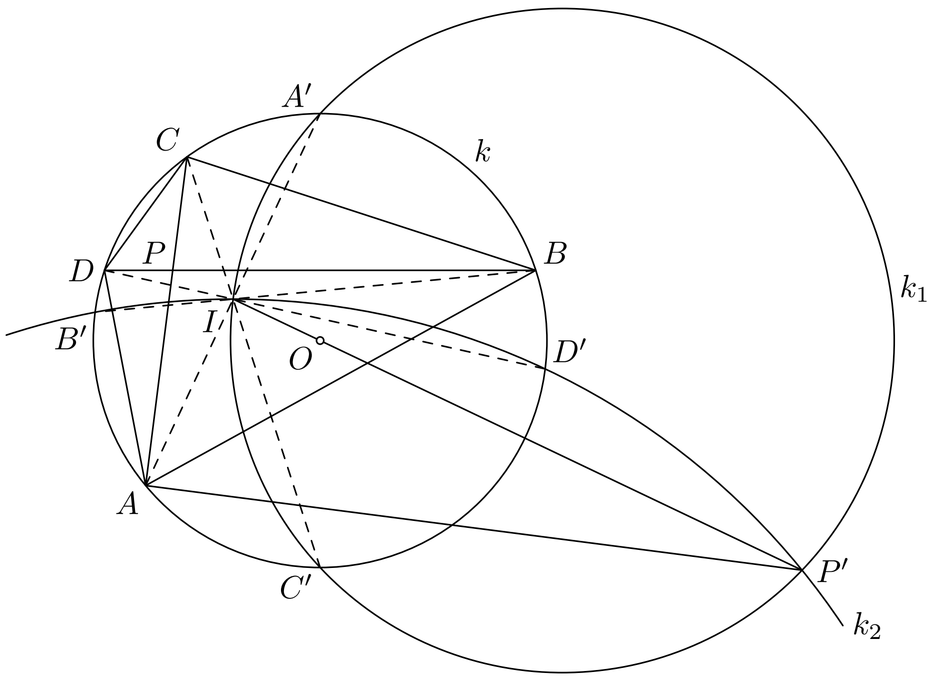


Obr. 1

Iné riešenie. (Podľa *Františka Simančíka.*) Body E, F, G, H z predošlého riešenia označme A', B', C', D' a kružnicu opísanú štvoruholníku $ABCD$ označme k. Z mocnosti bodu I ku k máme

$$|IA| \cdot |IA'| = |IB| \cdot |IB'| = |IC| \cdot |IC'| = |ID| \cdot |ID'|.$$

Preto existuje taká kružnicová inverzia ψ so stredom I, že zobrazenie $\varphi \equiv \mathcal{S}_I \circ \psi$ zobrazí body A, B, C, D v tomto poradí na body A', B', C', D' (pričom $\mathcal{S}_I$ je stredová súmernosť so stredom v bode I). Označme $\varphi(P) = P'$. Stačí ukázať, že body O, I a P' ležia na jednej priamke (keďže priamky PI a $P'I$ sú totožné). Zobrazenie φ zobrazí priamku AC do kružnice k_1 prechádzajúcej bodmi A', C', I a priamku BD do kružnice k_2 prechádzajúcej bodmi B', D', I (obr. 2). Bod P' je preto druhým priesečníkom kružníc k_1, k_2 (rôznym od I).



Obr. 2

Priamka $P'I$ je chordálou kružníc k_1, k_2. Stačí teda ukázať že bod O má ku kružniciam k_1, k_2 rovnakú mocnosť. Avšak už v prvom riešení sme ukázali, že $A'C'$ a $B'D'$ sú priemery kružnice k, ktorej stredom je O. Preto mocnosť bodu O ku k_1 aj ku k_2 má hodnotu $r^2 = |OA'| \cdot |OC'| = |OB'| \cdot |OD'|$, kde r je veľkosť polomeru kružnice k. Teda O naozaj leží na chordále $P'I$.

---

3. *Určte všetky prirodzené čísla $n \geqq 3$, pre ktoré sa polynóm*

$$P(x) = x^n - 3x^{n-1} + 2x^{n-2} + 6$$

dá vyjadriť ako súčin dvoch polynómov, ktoré majú kladné stupne a celočíselné koeficienty.

Riešenie. Ľahko overíme, že pre $n = 3$ platí

$$x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = (x + 1)(x^2 - 4x + 6).$$

Ak by sme pre $n = 4$ mali

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d),$$

porovnaním koeficientov by sme dostali

$$a + c = -3, \qquad ac + b + d = 2, \qquad bd = 6.$$

Z prvej rovnosti vyplýva, že a a c majú rôznu paritu. Preto z druhej rovnosti vyplýva, že b a d majú rovnakú paritu. To je v spore s treťou rovnosťou.

Predpokladajme ďalej, že $n \geqq 5$. Nech platí

$$P(x) = Q(x)R(x), \tag{1}$$

pričom

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \\ R(x) &= b_{n-k}x^{n-k} + b_{n-k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \end{aligned}$$

sú polynómy s celočíselnými koeficientmi a $a_k = b_{n-k} = \pm 1$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $k \leqq \lfloor n/2 \rfloor < n-2$ (pretože $n \geqq 5$). Porovnaním koeficientov na oboch stranách v (1) získame rovnosti

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 6, \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0, \\ &\vdots \\ a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_1 &= 0. \end{aligned}$$

Teraz indukciou dokážeme, že a_0 delí $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Predpokladajme, že sme toto tvrdenie dokázali pre $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$. Máme

$$0 = a_0(a_0 b_{\ell+1} + a_1 b_\ell + \cdots + a_\ell b_1 + a_{\ell+1} b_0) = a_0^2 b_{\ell+1} + a_0 a_1 b_\ell + \cdots + a_0 a_\ell b_1 + 6a_{\ell+1},$$

a teda

$$6a_{\ell+1} = -(a_0^2 b_{\ell+1} + a_0 a_1 b_\ell + \cdots + a_0 a_\ell b_1).$$

Vieme, že všetky sčítance na pravej strane sú deliteľné členom a_0^2, preto aj ľavá strana je ním deliteľná a nutne $a_0 \mid a_{\ell+1}$.

Ale keďže $a_k = \pm 1$, dostávame $a_0 = \pm 1$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a_0 = 1$; potom $b_0 = 6$.

Teraz zopakujeme rovnaké argumenty na koeficienty polynómu R. Dostaneme, že $b_0 = 6$ delí $b_1, b_2, \ldots, b_{n-3}$ (ak je to potrebné, položíme $b_\ell = 0$ pre $\ell > n-k$). Dostaneme tak spor ($b_{n-k} = \pm 1$) okrem prípadu, keď $n - k > n - 3$. Zostali tak dva prípady.

Prípad $k = 2$. Porovnaním koeficientov pri x^{n-2} v (1) máme

$$a_0 b_{n-2} + a_1 b_{n-3} + a_2 b_{n-4} = 2.$$

Z predošlého vieme, že na ľavej strane sú okrem prvého člena všetky deliteľné šiestimi, t. j. sú párne, zatiaľ čo prvý člen je rovný ± 1. Tým dostávame spor.

Prípad $k = 1$. Úloha sa tak zjednodušuje na nájdenie celočíselných koreňov polynómu P; ľahko možno nahliadnuť, že ak n je párne, také korene neexistujú, zatiaľ čo pre n nepárne máme $P(-1) = 0$.

Preto podmienky zadania spĺňajú práve nepárne čísla n.

---

4. *Rozdeľme $n \geqq 1$ označených guliek medzi deväť osôb A, B, C, D, E, F, G, H, I. Určte, koľkými spôsobmi ich môžeme rozdeliť za podmienky, že osoba A dostane rovnaký počet guliek ako osoby B, C, D, E spolu.*

Riešenie. Uvažujme polynóm

$$\begin{aligned} (x+2)^{2n} &= (x^2 + 4x + 4)^n = \\ &= (x^2 + x + x + x + x + 1 + 1 + 1 + 1) \cdots (x^2 + x + x + x + x + 1 + 1 + 1 + 1) \end{aligned}$$

a predstavme si, že sme roznásobili zátvorky a získali 9^n sčítancov. Ukážeme, že existuje bijektívne zobrazenie medzi sčítancami x^n a rozdeleniami spĺňajúcimi podmienky zadania.

Majme ľubovoľné rozdelenie guliek. Ak k-tu guľku dostane A, zvolíme z k-tej zátvorky x^2. Ak ju dostane B, C, D, resp. E, zvolíme z k-tej zátvorky prvú, druhú, tretiu, resp. štvrtú jednotku. A ak ju dostane F, G, H, resp. I, zvolíme z k-tej zátvorky prvý, druhý, tretí, resp. štvrtý člen x. Ak teraz vynásobíme členy, ktoré sme zvolili, vidíme, že výsledok je rovný x^n práve vtedy, keď A dostane rovnaký počet guliek ako B, C, D, E spolu.

Počet vyhovujúcich rozdelení je teda rovnaký ako koeficient pri x^n v polynóme $(x+2)^{2n}$, t. j.

$$\binom{2n}{n} \cdot 2^n.$$

---

5. *Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$. Určte množinu všetkých bodov P ležiacich vnútri štvoruholníka $ABCD$, pre ktoré platí*

$$S_{PAB} \cdot S_{PCD} = S_{PBC} \cdot S_{PDA},$$

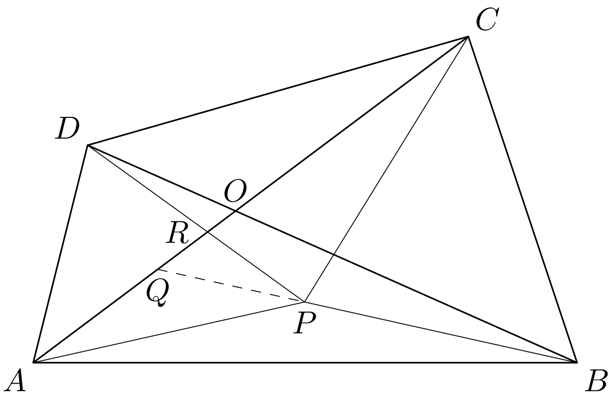
pričom S_{XYZ} označuje obsah trojuholníka XYZ.

Riešenie. Ak P leží na niektorej z uhlopriečok, povedzme na AC, tak

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{|AP|}{|PC|} = \frac{S_{PDA}}{S_{PCD}},$$

teda rovnosť zo zadania platí. Dokážeme, že pre body P ležiace vnútri štvoruholníka $ABCD$ mimo uhlopriečok zadaná rovnosť neplatí.

Označme O priesečník uhlopriečok a bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že P leží vnútri trojuholníka ABO (obr. 3). Označme ešte Q priesečník priamok BP



Obr. 3

a AC a R priesečník priamok DP a AC. Potom ľahko možno odvodiť rovnosti

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{|AQ|}{|QC|} \qquad \text{a} \qquad \frac{S_{PDA}}{S_{PCD}} = \frac{|AR|}{|RC|}.$$

Keďže $Q \neq R$, skúmaná rovnosť nemôže platiť.

Odpoveď. Hľadanou množinou bodov P sú vnútorné body uhlopriečok AC a BD.

6. *Nájdite všetky dvojice celých čísel* (x, y)*, ktoré spĺňajú rovnosť*

$$y(x+y)=x^3-7x^2+11x-3.$$

Riešenie. Vynásobením uvažovanej rovnice štyrmi a jednoduchou úpravou dostaneme ekvivalentnú rovnicu

$$\begin{aligned}(2y+x)^2&=4x^3-27x^2+44x-12=(x-2)(4x^2-19x+6)=\\&=(x-2)\big[(x-2)(4x-11)-16\big].\end{aligned}\tag{1}$$

Výraz na pravej strane musí byť štvorcom. Preto $(x-2)=ks^2$ pre nejaké $k\in\in\{-2,-1,1,2\}$ a $s\in\mathbb{N}$ (totiž ak pre nejaké prvočíslo p a nezáporné celé číslo m je $(x-2)$ deliteľné výrazom p^{2m+1}, ale nie výrazom p^{2m+2}, tak máme $p\mid(x-2)(4x-11)-16$, teda $p\mid 16$ a $p=2$).

Rozoberieme osobitne tri prípady.

Prípad $k=\pm2$. Z (1) máme $4x^2-19x+6=\pm2u^2$ pre nejaké celé číslo u, z čoho úpravou dostaneme

$$(8x-19)^2-265=\pm32u^2.$$

Túto rovnosť však nespĺňajú žiadne celé čísla x, u, pretože ľavá strana dáva po delení piatimi zvyšok 0, 1 alebo 4, zatiaľ čo pravá strana zvyšok 0, 2 alebo 3. Jedinou možnosťou je teda zvyšok 0, avšak v takom prípade by pravá strana bola deliteľná číslom 25 a ľavá strana nie.

Prípad $k=1$. Potom $4x^2-19x+6=u^2$ pre nejaké celé číslo u, odkiaľ po vynásobení šestnástimi po úprave dostaneme

$$265=(8x-19)^2-16u^2=(8x-19-4u)(8x-19+4u).$$

Ľahko overíme, že $x=6$ je jediná možnosť, pre ktorú dostaneme vyhovujúce riešenie pôvodnej rovnice (stačí uvažovať všetky možné rozklady $265=1\cdot265=5\cdot53=\dots$ a brať do úvahy fakt, že $x-2=s^2$). Po dosadení do (1) tak získame dvojice $(6,3)$ a $(6,-9)$.

Prípad $k=-1$. Podobne ako v predošlom prípade máme $4x^2-19x+6=-u^2$, odkiaľ

$$265=(8x-19)^2+(4u)^2.$$

Overíme všetky možnosti. Pre $u=0,1,2$ nezískame žiadne riešenie. Pre $u=3$ dostaneme $(8x-19)^2=121=11^2$, z čoho $x=1$; získame tak dvojice $(1,1)$, $(1,-2)$. Napokon pre $u=4$ máme $(8x-19)^2=9=3^2$, t. j. $x=2$, odkiaľ získame dvojicu $(2,-1)$.

Zadanú rovnosť spĺňajú dvojice $(6,3)$, $(6,-9)$, $(1,1)$, $(1,-2)$ a $(2,-1)$.