2003/2004
53. ročník MO *Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

1. *Dokážte, že reálne čísla p, q, r spĺňajú podmienku*
$$p^4(q-r)^2+2p^2(q+r)+1=p^4$$
práve vtedy, keď kvadratické rovnice
$$x^2+px+q=0, \qquad y^2-py+r=0$$
majú reálne korene (nie nutne rôzne), ktoré možno označiť $x_{1,2}$ resp. $y_{1,2}$ v takom poradí, že platí rovnosť $x_1y_1-x_2y_2=1$. (*J. Šimša*)

Riešenie. Tvrdenie úlohy v sebe zahŕňa dve implikácie. Dokážeme najskôr jednu a potom druhú.

Prvá časť. Nech kvadratické rovnice zo zadania majú reálne korene spĺňajúce $x_1y_1-x_2y_2=1$. Podľa známeho vzťahu majú tieto korene vyjadrenia
$$x_{1,2}=\frac{-p\pm K}{2} \qquad \text{a} \qquad y_{1,2}=\frac{p\pm L}{2}, \tag{1}$$
pričom reálne čísla K, L spĺňajú rovnosti $K^2=p^2-4q$ a $L^2=p^2-4r$ (číslam K, L priradíme znamienka podľa očíslovania koreňov). Potom
$$1=x_1y_1-x_2y_2=\frac{(-p+K)(p+L)-(-p-K)(p-L)}{4}=\frac{p(K-L)}{2},$$
odkiaľ $p\neq 0$ a $K-L=2/p$. Dosadením do rovnosti
$$(K+L)(K-L)=K^2-L^2=(p^2-4q)-(p^2-4r)=4(r-q)$$
vyjde $K+L=2p(r-q)$. Zo získaných vyjadrení čísel $K+L$ a $K-L$ dostaneme $K=1/p-p(q-r)$, po umocnení $K^2=1/p^2-2(q-r)+p^2(q-r)^2$. Keď to porovnáme s rovnosťou $K^2=p^2-4q$, obdržíme po jednoduchej úprave žiadanú rovnosť zo zadania.

Druhá časť. Nech reálne čísla p, q, r spĺňajú prvú rovnosť zo zadania. Potom zrejme $p\neq 0$. Danú rovnosť upravíme dvoma podobnými spôsobmi na tvary
$$p^4(r-q)^2+2p^2(r-q)+1=p^4-4p^2q \quad \text{a} \quad p^4(q-r)^2+2p^2(q-r)+1=p^4-4p^2r.$$
Odtiaľ po vydelení číslom p^2 zisťujeme, že diskriminanty kvadratických rovníc zo zadania majú vyjadrenia
$$p^2-4q=\left(\frac{p^2(r-q)+1}{p}\right)^2 \quad \text{a} \quad p^2-4r=\left(\frac{p^2(q-r)+1}{p}\right)^2,$$
takže to sú nezáporné čísla a príslušné (reálne) korene majú tvar (1), pričom
$$K=\frac{p^2(r-q)+1}{p} \quad \text{a} \quad L=-\frac{p^2(q-r)+1}{p}.$$
Znamienka čísel K a L sme zvolili tak, aby vyšlo (pozri prvú časť)
$$x_1y_1-x_2y_2=\frac{p(K-L)}{2}=\frac{p}{2}\cdot\left(\frac{p^2(r-q)+1}{p}+\frac{p^2(q-r)+1}{p}\right)=1.$$

2. *Dokážte, že pre každé prirodzené číslo k existuje najviac konečne veľa takých trojíc navzájom rôznych prvočísel p, q, r, pre ktoré je číslo $qr - k$ násobkom p, číslo $pr - k$ násobkom q a súčasne číslo $pq - k$ násobkom r.* (...)

Riešenie. Navzájom rôzne prvočísla p, q, r vyhovujú podmienkam úlohy práve vtedy, keď číslo $pq + pr + qr - k$ je deliteľné každým z čísel p, q, r, čiže ich súčinom pqr. Rovnosť $pq + pr + qr - k = n \cdot pqr$ pre vhodné celé n prepíšme na $k = pq + pr + qr - n \cdot pqr$. Ak $n \leqq 0$, vyplýva z ostatnej rovnosti, že $\max\{pq, pr, qr\} \leqq k$. Potom však každé z prvočísel p, q, r je najviac $k/2$ a takých trojíc je konečný počet. Ak $n \geqq 1$, dostávame odhad $k \leqq pq + pr + qr - pqr$. Ukážme, že s výnimkou trojice $\{p, q, r\} = \{2, 3, 5\}$ je ostatný výraz vždy záporný (čo bude v spore s tým, že $k > 0$). V takom prípade môžeme určite predpokladať, že $2 \leqq p < q < r$ a $r \geqq 7$. Potom $pq \geqq 2 \cdot 3 = 6$ a z nerovnosti $(p-2)(q-2) \geqq 0$ vyplýva $p + q \leqq pq/2 + 2$, takže

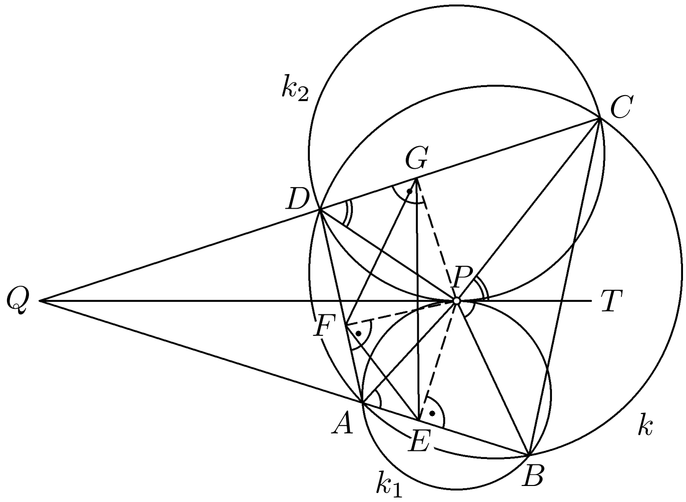
$$pq + pr + qr - pqr = (p+q)r + pq - pqr \leqq (\tfrac{1}{2}pq + 2)r + pq - pqr =$$
$$= 2r - pq(\tfrac{1}{2}r - 1) \leqq 2r - 6(\tfrac{1}{2}r - 1) = 6 - r < 0.$$

3. *Vnútri tetivového štvoruholníka $ABCD$ je daný bod P tak, že platí*

$$|\measuredangle BPC| = |\measuredangle BAP| + |\measuredangle PDC|.$$

Označme E, F, G päty kolmíc z bodu P postupne na priamky AB, AD a DC. Dokážte, že trojuholník FEG je podobný s trojuholníkom PBC. (J. Švrček)

Riešenie. Označme k kružnicu opísanú štvoruholníku $ABCD$ a k_1, k_2 kružnice opísané trojuholníkom PAB, PCD. Vnútri uhla BPC uvažujme takú polpriamku PT, pre



Obr. 1

ktorú platí $|\measuredangle BPT| = |\measuredangle BAP|$. Podľa zadania potom platí (obr. 1)

$$|\measuredangle CPT| = |\measuredangle BPC| - |\measuredangle BPT| = |\measuredangle BPC| - |\measuredangle BAP| = |\measuredangle PDC|.$$

Priamka PT je teda spoločnou vnútornou dotyčnicou oboch kružníc k_1 a k_2.

Uvažujme najskôr prípad, keď strany AB a CD uvažovaného tetivového štvoruholníka nie sú rovnobežné. Vzhľadom na to, že úsečky AB a CD sú spoločnými tetivami prislúchajúcich dvojíc kružníc k_1, k a k_2, k, existuje jediný bod Q, ktorý má rovnakú mocnosť ku všetkým trom kružniciam k, k_1 a k_2. Týmto bodom Q je spoločný bod všetkých troch priamok (chordál) AB, CD a PT. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že bod Q leží na polpriamke BA za bodom A (obr. 1).

Podľa Tálesovej vety sú zrejme štvoruholníky $AEPF$, $FPGD$ a $QEPG$ tetivové. Z rovností príslušných obvodových uhlov tak vyplýva

$$\begin{aligned}|\measuredangle EFG| &= |\measuredangle EFP| + |\measuredangle GFP| = |\measuredangle BAP| + |\measuredangle PDC| = \\ &= |\measuredangle BPT| + |\measuredangle CPT| = |\measuredangle BPC|.\end{aligned}$$

Podobne zistíme, že

$$\begin{aligned}|\measuredangle FEG| &= |\measuredangle FEP| - |\measuredangle GEP| = |\measuredangle FAP| - |\measuredangle GQP| = \\ &= |\measuredangle DAP| - |\measuredangle DQP| = |\measuredangle QDA| - |\measuredangle QPA|,\end{aligned}$$

lebo $|\measuredangle DAP| + |\measuredangle QPA| = |\measuredangle QDA| + |\measuredangle DQP|$. Pre úsekový uhol QPA navyše platí $|\measuredangle QPA| = |\measuredangle PBA|$, takže

$$\begin{aligned}|\measuredangle FEG| &= |\measuredangle QDA| - |\measuredangle QPA| = |\measuredangle QDA| - |\measuredangle PBA| = \\ &= |\measuredangle QBC| - |\measuredangle PBA| = |\measuredangle PBC|.\end{aligned}$$

Tým sme dokázali, že trojuholníky FEG a PBC sa zhodujú v dvoch vnútorných uhloch, a sú teda podobné (uu).

Ak sú priamky AB a CD rovnobežné, je $ABCD$ rovnoramenný lichobežník so základňami AB a CD. Odtiaľ vyplýva, že body E, P, G ležia na osi súmernosti lichobežníka $ABCD$ a trojuholníky APD a BPC sú zhodné. Z vlastností obvodových uhlov tetivových štvoruholníkov $AEPF$ a $FPGD$ ľahko vyplýva, že trojuholníky EFG a APD sú podobné ($|\measuredangle FEG| = |\measuredangle PAD|$ a $|\measuredangle EGF| = |\measuredangle ADP|$). Odtiaľ už vyplýva podobnosť trojuholníkov FEG a PBC. Tým je dôkaz hotový.

---

4. *V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc*

$$\frac{1}{xy} = \frac{x}{z} + 1, \quad \frac{1}{yz} = \frac{y}{x} + 1, \quad \frac{1}{zx} = \frac{z}{y} + 1.$$

(*J. Földes*)

Riešenie. Z tvaru rovníc vyplýva podmienka $xyz \neq 0$. Aspoň dve z čísel x, y, z musia mať rovnaké znamienko. Potom je kladná pravá strana rovnice, v ktorej sú tieto dve čísla v podiele, preto je kladná aj príslušná ľavá strana, takže zostávajúce z čísel x, y, z má rovnaké znamienko ako prvé dve. Platí teda buď $x, y, z > 0$, alebo $x, y, z < 0$.

Zaoberajme sa iba prvým prípadom, druhý sa totiž prevedie na prvý zmenou riešenia (x, y, z) na riešenie $(-x, -y, -z)$. Prvé dve rovnice sústavy vynásobme výrazom xyz a potom ich odčítajme. Po úprave dostaneme $z - x = y(x^2 - yz)$. Ak je trojica (x, y, z) riešením, sú riešeniami aj trojice (y, z, x) a (z, x, y), ktoré dostaneme cyklickou zámenou. Preto môžeme predpokladať, že $x = \max\{x, y, z\}$. Potom $z - x \leqq 0$ a $x^2 - yz \geqq 0$ (nezabúdajme, že $x, y, z > 0$), takže z rovnosti $z - x = y(x^2 - yz)$ a podmienky $y > 0$ vyplýva $z - x = x^2 - yz = 0$, čo znamená $x = y = z$. Máme teda jedinú rovnicu $1/x^2 = 1 + 1$, ktorá má (jediný) kladný koreň $x = \sqrt{2}/2$.

Odpoveď. Sústava má práve dve riešenia $x = y = z = \pm\sqrt{2}/2$.

5. *Vnútri strán AB, BC, CA daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body K, L, M tak, že platí*

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|CM|}{|MA|}.$$

Dokážte, že trojuholníky ABC a KLM majú spoločný priesečník výšok práve vtedy, keď je trojuholník ABC rovnostranný. (*P. Černek*)

Riešenie. Bod V roviny trojuholníka ABC je priesečníkom jeho výšok práve vtedy, keď platí zároveň $AV \perp BC$ a $BV \perp AC$, čiže

$$\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad \text{a} \qquad \overrightarrow{BV} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Po dosadení $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BV} - \overrightarrow{CV}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AV} - \overrightarrow{CV}$ a jednoduchej úprave dostaneme ekvivalentnú podmienku vo forme rovnosti skalárnych súčinov

$$\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{BV} = \overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{CV} = \overrightarrow{BV} \cdot \overrightarrow{CV}. \tag{1}$$

Našou úlohou je teda zistiť, kedy platí sústava (1) zároveň s podobnou sústavou

$$\overrightarrow{KV} \cdot \overrightarrow{LV} = \overrightarrow{KV} \cdot \overrightarrow{MV} = \overrightarrow{LV} \cdot \overrightarrow{MV}, \tag{2}$$

ktorá vyjadruje, že bod V je priesečníkom výšok trojuholníka KLM. Vyjadríme vektory z (2) ako lineárne kombinácie vektorov z (1). Podľa zadania existuje číslo p, $0 < p < 1$, pre ktoré platí

$$\overrightarrow{AK} = p\,\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BL} = p\,\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CM} = p\,\overrightarrow{CA}.$$

Keď do prvej rovnosti dosadíme $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AV} - \overrightarrow{KV}$ a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AV} - \overrightarrow{BV}$, dostaneme po úprave prvú z rovností

$$\overrightarrow{KV} = (1-p)\overrightarrow{AV} + p\,\overrightarrow{BV},\ \overrightarrow{LV} = (1-p)\overrightarrow{BV} + p\,\overrightarrow{CV},\ \overrightarrow{MV} = (1-p)\overrightarrow{CV} + p\,\overrightarrow{AV}.$$

Druhé dve rovnosti odvodíme analogicky. Odtiaľ vynásobením dostaneme

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KV} \cdot \overrightarrow{LV} &= (1-p)^2\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{BV} + p(1-p)\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{CV} + p(1-p)\overrightarrow{BV}^2 = \\ &= (1-p)s + p(1-p)\overrightarrow{BV}^2,\end{aligned}$$

kde písmeno s označuje spoločnú hodnotu súčinov z (1). Analogicky platí

$$\overrightarrow{KV} \cdot \overrightarrow{MV} = (1-p)s + p(1-p)\overrightarrow{AV}^2 \quad \text{a} \quad \overrightarrow{LV} \cdot \overrightarrow{MV} = (1-p)s + p(1-p)\overrightarrow{BV}^2.$$

Vidíme, že sústava (2) je ekvivalentná so sústavou rovností

$$p(1-p)\overrightarrow{AV}^2 = p(1-p)\overrightarrow{BV}^2 = p(1-p)\overrightarrow{CV}^2,$$

ktorá je vzhľadom na $p(1-p) \neq 0$ splnená práve vtedy, keď $|AV| = |BV| = |CV|$. Táto podmienka znamená, že priesečník výšok V trojuholníka ABC splýva so stredom kružnice opísanej. To nastane práve vtedy, keď je trojuholník ABC rovnostranný.

Iné riešenie. V prvej časti riešenia predpokladajme, že ABC je rovnostranný trojuholník, a označme O stred kružnice opísanej tomuto trojuholníku. Pri jednej z rotácií o $120°$ okolo bodu O platí $A \mapsto B \mapsto C \mapsto A$ a tiež $K \mapsto L \mapsto M \mapsto K$, lebo napríklad body K, resp. L delia v rovnakom pomere úsečku AB, resp. úsečku BC, ktorá je obrazom prvej úsečky v spomenutej rotácii. To znamená, že aj trojuholník KLM je rovnostranný a bod O je ortocentrom oboch trojuholníkov ABC a KLM.

V druhej časti riešenia predpokladajme, že ABC nie je rovnostranný trojuholník. Potom stred O kružnice opísanej tomuto trojuholníku nesplýva s jeho ťažiskom T. Ľahko ukážeme, že bod $T = (A+B+C)/3$ je ťažiskom aj trojuholníka KLM. Podľa zadania totiž existuje číslo $p \in (0,1)$ také, že

$$K = pA + (1-p)B, \quad L = pB + (1-p)C, \quad M = pC + (1-p)A,$$

odkiaľ okamžite vyplýva rovnosť $(K+L+M)/3 = (A+B+C)/3$.

Pripusťme, že trojuholníky ABC a KLM majú okrem ťažiska T spoločné aj ortocentrum, ktoré označíme V. Podľa známej vety ležia body V, T, O v uvedenom poradí na jednej priamke, nazývanej Eulerova priamka trojuholníka ABC, pričom platí $|VT| : |TO| = 2 : 1$. Stred kružnice opísanej je teda ťažiskom a ortocentrom jednoznačne určený. Úvahou o Eulerovej priamke trojuholníka KLM tak zisťujeme, že bod O je nielen stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC, ale aj stredom kružnice opísanej trojuholníku KLM. Body K, L, M majú preto rovnakú vzdialenosť od bodu O, takže majú aj rovnakú mocnosť ku kružnici opísanej trojuholníku ABC. Tieto mocnosti sa rovnajú hodnotám

$$\begin{aligned} -|AK| \cdot |BK| &= -p(1-p)|AB|^2, \\ -|BL| \cdot |CL| &= -p(1-p)|BC|^2, \\ -|CM| \cdot |AM| &= -p(1-p)|AC|^2, \end{aligned}$$

ktorých porovnaním dostaneme rovnosti $|AB| = |BC| = |CA|$ (lebo $p \notin \{0,1\}$). To je v spore s predpokladom, že trojuholník ABC nie je rovnostranný.

---

6. *Na stole leží k kôpok s 1, 2, …, k kamienkami, pričom $k \geqq 3$. V prvom kroku vyberieme 3 ľubovoľné kôpky na stole, spojíme ich do jednej a z tejto novej kôpky odstránime 1 kamienok (preč zo stola). V druhom kroku opäť spojíme niektoré tri kôpky do jednej a potom z nej odoberieme 2 kamienky. Všeobecne v i-tom kroku spojíme ľubovoľné tri kôpky, v ktorých je spolu viac ako i kamienkov, do jednej kôpky a potom z nej i kamienkov odstránime. Predpokladajme, že po niekoľkých krokoch zostane na stole jediná kôpka, v ktorej je p kamienkov. Dokážte, že číslo p je štvorec práve vtedy, keď obe čísla $2k+2$ a $3k+1$ sú štvorce. Ďalej potom nájdite najmenšie k, pre ktoré je číslo p štvorec.* (R. Kučera)

Riešenie. Po i spravených krokoch bude na stole $k-2i$ kôpok. Ak teda zostane nakoniec na stole jediná kôpka, bolo číslo k nepárne a celkový počet krokov bol $(k-1)/2$. Rozoberieme, či číslo k dáva po delení štyrmi zvyšok 1, alebo zvyšok 3.

Prípad $k = 4c+1$. Na začiatku leží na stole $1+\cdots+k = k(k+1)/2 = (4c+1)(2c+ + 1)$ kamienkov, vo všetkých $2c$ krokoch odstránime celkom $1 + \cdots + 2c = c(2c + 1)$ kamienkov, takže počet kamienkov v poslednej kôpke bude

$$p = (4c + 1)(2c + 1) - c(2c + 1) = (2c + 1)(3c + 1).$$

Čísla $2c+1$ a $3c+1$ sú však nesúdeliteľné, takže p je štvorec práve vtedy, keď sú štvorce obe čísla $2c + 1$ a $3c + 1$, teda práve vtedy, keď sú štvorce ich štvornásobky $4(2c + 1) = = 2k + 2$ a $4(3c + 1) = 3k + 1$.

Prípad $k = 4c+3$. Na začiatku leží na stole $1+\cdots+k = k(k+1)/2 = 2(c+1)(4c+3)$ kamienkov, vo všetkých $2c + 1$ krokoch odstránime celkom $1 + \cdots + (2c + 1) = (c + + 1)(2c + 1)$ kamienkov, takže počet kamienkov v poslednej kôpke bude

$$p = 2(c + 1)(4c + 3) - (c + 1)(2c + 1) = (c + 1)(6c + 5).$$

Keby bolo číslo p štvorec, museli by byť štvorcami obe nesúdeliteľné čísla $c+1$ a $6c+5$. Ukážme, že to nie je možné. Pripusťme existenciu prirodzených čísel x, y takých, že $c + 1 = x^2$ a $6c + 5 = y^2$. Z rovnosti $6x^2 - y^2 = 1$ vyplýva, že číslo y je nepárne, takže číslo y^2 dáva po delení ôsmimi zvyšok 1. Číslo $6x^2$ potom po delení ôsmimi dáva zvyšok 2, odkiaľ vyplýva, že číslo $3x^2$ po delení štyrmi dáva zvyšok 1, a to je spor. V prípade $k = 4c + 3$ teda p nikdy nie je štvorec, rovnako ako nie je štvorec ani číslo $3k + 1 = 12c + 10$ (párne číslo, ktoré nie je deliteľné štyrmi).

Teraz nájdeme najmenšie číslo $k = 4c + 1$, $c \geqq 1$, pre ktoré sú obe čísla $2c + 1$ a $3c + 1$ štvorce. Z rovností $2c + 1 = x^2$ a $3c + 1 = y^2$ pre vhodné celé $x, y > 1$ vyplýva $3x^2 - 2y^2 = 1$, takže x je nepárne. Potom číslo $2y^2$ po delení štyrmi dáva zvyšok 2, takže aj y je nepárne. Položme $x = 2a + 1$, $y = 2b + 1$ ($a, b > 0$ celé) a dosaďme do rovnosti $3x^2 - 2y^2 = 1$. Po úprave dostaneme vzťah $3a(a+1) = 2b(b+1)$, kam postupne dosadzujeme $a = 1, 2, \ldots$ Nájdeme tak rýchlo najmenšie vyhovujúce $a = 4$ a $b = 5$, ktorým zodpovedá $x = 9$, $y = 11$, $c = 40$ a $k = 161$.