

2002/2003

52. ročník MO

Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

1. Nech $n \geq 2$ je prirodzené číslo. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \max\{1, x_1\} &= x_2, \\ \max\{2, x_2\} &= x_3, \\ &\vdots \\ \max\{n-1, x_{n-1}\} &= (n-1)x_n, \\ \max\{n, x_n\} &= nx_1. \end{aligned}$$

Riešenie. Ukážeme najprv, že pre každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $x_i \leq i$. Dôkaz urobíme sporom. Predpokladajme, že $x_i > i$ pre nejaké i .

Ak $x_1 > 1$, vyplýva z poslednej rovnice danej sústavy nerovnosť $\max\{n, x_n\} = nx_1 > n$, takže $x_n > n$. Ak ďalej pre nejaké $i > 1$ platí $x_i > i$, potom $\max\{i-1, x_{i-1}\} = (i-1)x_i > (i-1)i > i-1$. Preto tiež $x_{i-1} > i-1$. Odtiaľ vyplýva, že ak nerovnosť $x_i > i$ platí pre niektoré $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, potom už platí pre každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. V takom prípade má však daná sústava tvar

$$x_1 = x_2, \quad x_2 = 2x_3, \quad \dots, \quad x_{n-1} = (n-1)x_n, \quad x_n = nx_1.$$

Vynásobením týchto rovníc dostaneme $x_1 x_2 \dots x_n = n! x_1 x_2 \dots x_n$, čo neplatí pre žiadne prirodzené $n \geq 2$. Všetky x_i sú totiž kladné čísla. To je spor.

Pre všetky $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ teda $x_i \leq i$. Preto

$$i = \max\{i, x_i\} = ix_{i+1}, \quad \text{pričom } x_{n+1} = x_1.$$

Odtiaľ už ľahko získame jediné reálne riešenie danej sústavy

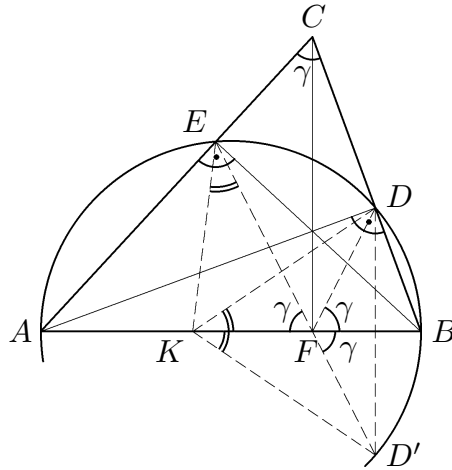
$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1.$$

2. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC , v ktorom veľkosť vnútorného uhla pri vrchole B je väčšia ako 45° . Nech D, E, F sú po rade päty výšok z vrcholov A, B, C a nech K je taký bod úsečky AF , že platí $|\angle DKF| = |\angle KEF|$. Dokážte, že

- taký bod K vždy existuje;
- platí rovnosť $|KD|^2 = |FD|^2 + |AF| \cdot |BF|$.

Riešenie. a) Označme veľkosti vnútorných uhlov daného trojuholníka ABC zvyčajným spôsobom a uvažujme Tálesovu kružnicu zostrojenú nad priemerom BC . Vzhľadom na to, že trojuholník ABC je ostrouhlý, ležia päty výšok E, F v polrovine BCA . Z vlastností tetivového štvoruholníka $BCEF$ vyplýva (obr. 1), že $|\angle AFE| = \gamma$ a $|\angle AEF| = \beta$. Podobne z tetivového štvoruholníka $AFDC$ vyplýva, že $|\angle DFB| = \gamma$. Ak $K = A$, potom $|\angle DKF| = |\angle DAF| = 90^\circ - \beta$ a $|\angle KEF| = |\angle AEF| = \beta$.

Ak sa bod K bude spojitou pohybovať po úsečke AF od bodu A k bodu F , porastie veľkosť uhla DKF spojitou od hodnoty $90^\circ - \beta$ k hodnote γ (v ostrouhlom trojuholníku je



Obr. 1

$90^\circ - \beta < \gamma$) a súčasne bude veľkosť uhla KEF spojito klesať, a to od veľkosti $\beta > 90^\circ - \beta$ k hodnote 0° . Preto na úsečke AF existuje bod K , pre ktorý platí $|\angle DKF| = |\angle KEF|$.

b) Nech D' je obraz bodu D v osovej súmernosti podľa priamky AB . Pretože $|\angle AFE| = |\angle DFB| = \gamma$, ležia body E, F a D' na jednej priamke. Priamka KD' je podľa vety o úsekovom uhle dotyčnicou kružnice k opísanej trojuholníku KFE , pretože $|\angle D'KF| = |\angle DKF| = |\angle KEF|$. Pre mocnosť bodu D' ku kružnici k platí

$$\begin{aligned} |KD'|^2 &= |D'F| \cdot |D'E| = |D'F|(|D'F| + |FE|) = \\ &= |D'F|^2 + |D'F| \cdot |FE|. \end{aligned} \quad (1)$$

Teraz stačí využiť rovnosti $|FD| = |D'F|$ a $|KD| = |KD'|$, ktoré vyplývajú zo súmernosti bodov D a D' podľa AB a mocnosť bodu F ku kružnici s priemerom AB , podľa ktorej

$$|EF| \cdot |FD'| = |AF| \cdot |BF|.$$

Dosadením do (1) tak dostaneme $|KD|^2 = |FD|^2 + |AF| \cdot |BF|$, čo sme chceli dokázať.

3. Ak pre čísla p, q, r z intervalu $\langle 2/5, 5/2 \rangle$ platí $pqr = 1$, potom existujú dva trojuholníky s rovnakým obsahom, pričom jeden má strany a, b, c a druhý má strany pa, qb, rc . Dokážte.

Riešenie. Zo zadania úlohy vyplýva, že niektoré dve z čísel p, q, r sú buď nanajvýš rovné 1, alebo sú aspoň 1. Môžeme ich preto označiť tak, že nastane jeden z nasledujúcich dvoch prípadov:

- (i) $p \leq q \leq 1 \leq r$,
- (ii) $r \leq 1 \leq p \leq q$.

(i) Položme $a = q, b = 1, c = pq$, potom platí $pa = pq = c, qb = q = a, rc = = pqr = 1 = b$. Trojuholníky, ktorých strany majú veľkosti a, b, c a pa, pb, pc , sú teda zhodné (ak existujú). Ukážeme, že trojuholník so stranami dĺžok $q, 1, pq$ existuje.

Pretože $pq \leq q \leq 1$, stačí overiť jedinú trojuholníkovú nerovnosť, a to $pq + q > 1$. Zo vzťahov

$$pq = \frac{1}{r} \quad \text{a} \quad r \leq \frac{5}{2} \quad \text{vyplýva} \quad pq \geq \frac{2}{5}.$$

Vzhľadom na to, že $p \leq q$, platí tiež

$$q \geq \sqrt{\frac{2}{5}} > \frac{3}{5}, \quad \text{a teda} \quad pq + q > 1.$$

(ii) Položme opäť $a = q$, $b = 1$, $c = pq$. Ukážeme, že aj v tomto prípade existuje trojuholník so stranami dĺžok q , 1 , pq . Pretože teraz $pq \geq q \geq 1$, stačí overiť nerovnosť $pq < q + 1$. Z nerovnosti $p \leq q$ vyplýva $\sqrt{pq} \leq q$; stačí preto overiť silnejšiu nerovnosť $pq < \sqrt{pq} + 1$, t.j. že $t = \sqrt{pq}$ spĺňa kvadratickú nerovnosť $t^2 - t - 1 < 0$, alebo že $-3/2 < \sqrt{pq} < 5/2$. Zo vzťahov

$$pq = \frac{1}{r} \quad \text{a} \quad r \geq \frac{2}{5} \quad \text{vyplýva} \quad \sqrt{pq} \leq \sqrt{\frac{5}{2}} < \frac{5}{2},$$

a navyiac $\sqrt{pq} \geq 1$. Tým je dôkaz hotový.

4. Daný je trojuholník ABC a v jeho vnútri bod P ležiaci na ťažnici z vrcholu C . Označme X priesečník priamky AP so stranou BC a Y priesečník priamky BP so stranou AC . Dokážte, že ak je štvoruholník $ABXY$ tetivový, potom je trojuholník ABC rovnoramenný.

Riešenie. Označme dĺžky strán trojuholníka ABC zvyčajným spôsobom a , b , c a D stred strany AB . Z mocnosti bodu C ku kružnici opísanej štvoruholníku $ABXY$ dostaneme $|CA| \cdot |CY| = |CB| \cdot |CX|$, teda $a \cdot |CX| = b \cdot |CY|$. Z Cèvovej vety potom vyplýva

$$\frac{|AD| \cdot |BX| \cdot |CY|}{|DB| \cdot |XC| \cdot |YA|} = \frac{|BX| \cdot |CY|}{|XC| \cdot |YA|} = 1,$$

takže dosadením $a \cdot |CX| = b \cdot |CY|$ dostávame ďalej $a \cdot |BX| = b \cdot |AY|$. Sčítaním rovností

$$a \cdot |CX| = b \cdot |CY| \quad \text{a} \quad a \cdot |BX| = b \cdot |AY|$$

dostaneme $a^2 = b^2$, čiže $a = b$. Trojuholník ABC je teda rovnoramenný.

Iné riešenie. Ak je štvoruholník $ABXY$ tetivový, sú trojuholníky ABC a XYC podobné (uu), platí preto $a \cdot |CX| = b \cdot |CY|$. Označme S_{EFG} obsah trojuholníka EFG . Pre obsahy trojuholníkov zrejme platí

$$\frac{S_{APC}}{S_{APY}} = \frac{|AC|}{|AY|} = \frac{b}{|AY|} \quad \text{a} \quad \frac{S_{BPC}}{S_{BPX}} = \frac{|BC|}{|BX|} = \frac{a}{|BX|}.$$

Pretože bod P leží na ťažnici z vrcholu C trojuholníka ABC , platí tiež $S_{APC} = S_{BPC}$, čo s oboma predchádzajúcimi vzťahmi dáva

$$\frac{b}{|AY|} S_{APY} = \frac{a}{|BX|} S_{BPX}.$$

Z rovnosti obvodových uhlov AXB a AYB a ďalej z rovnosti vrcholových uhlov pri vrchole P vyplýva podobnosť trojuholníkov APY a BPX (uu). Platí teda $S_{APY} : S_{BPX} = |AY|^2 : |BX|^2$, čo v spojení s predchádzajúcim vzťahom dáva $a \cdot |BX| = b \cdot |AY|$. Ďalej pokračujeme ako v predchádzajúcom riešení.

5. Určte všetky prirodzené čísla $n \geq 2$, pre ktoré sú všetky binomické koeficienty

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}$$

párne čísla.

Riešenie. Ukážeme, že podmienkam úlohy vyhovujú všetky prirodzené čísla n , ktoré sú mocninami čísla 2, t. j. všetky prirodzené čísla tvaru $n = 2^m$, kde m je prirodzené číslo. Pre každé $k \in \{1, 2, \dots, 2^m - 1\}$ platí

$$\binom{2^m}{k} = \frac{2^m \cdot (2^m - 1) \cdot \dots \cdot (2^m - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}. \quad (1)$$

Lubovoľné prirodzené číslo $r \in \{1, \dots, k - 1\}$ možno zapísať v tvare $2^{\alpha}\ell$, kde ℓ je nepárne číslo a $\alpha < m$ je celé nezáporné číslo. Preto každý zo zlomkov

$$\frac{2^m - r}{r} = \frac{2^{m-\alpha} - \ell}{\ell}$$

má po skrátaní v čitateli aj v menovateli nepárne čísla. Podobne aj číslo k možno zapísať v tvare $2^{\alpha}\ell$, preto zlomok na pravej strane rovnosti

$$\frac{2^m}{k} = \frac{2^{m-\alpha}}{\ell}$$

má v čitateli párne a v menovateli nepárne číslo. Súčin všetkých týchto zlomkov pre $r = 1, 2, \dots, k$ je rovný kombinačnému číslu (1), ktoré je preto párne. Tým sme dokázali, že každé kombinačné číslo tvaru (1) je párne.

Nech naopak n nie je mocninou čísla 2, t. j. $n = c \cdot 2^m$, kde $c \geq 3$ je nepárne číslo. Ukážeme, že kombinačné číslo

$$\binom{c \cdot 2^m}{2^m} = \frac{c \cdot 2^m (c \cdot 2^m - 1) \cdot \dots \cdot (c \cdot 2^m - 2^m + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2^m} \quad (2)$$

je nepárne. Podobne ako skôr ukážeme, že pre všetky $r \in \{1, 2, \dots, 2^m - 1\}$ má každý zo zlomkov

$$\frac{c \cdot 2^m - r}{r} \quad \text{a tiež} \quad \frac{c \cdot 2^m}{2^m} = c$$

po skrátaní v čitateli aj v menovateli nepárne čísla. Súčin všetkých týchto zlomkov je rovný kombinačnému číslu (2), ktoré je preto nepárne.

Danej úlohe vyhovujú všetky prirodzené čísla n , ktorá sú mocninou čísla 2.

6. Nájďte všetky funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ktoré pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ spĺňajú vzťah

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$

Riešenie. Pre každé $c \in \mathbb{R}$ je funkcia $f(x) = x + c$ riešením danej funkcionálnej rovnice (obe jej strany sú potom rovné $x + y + 2c$). Ukážeme, že iné riešenia daná rovnica nemá. Najprv dokážeme, že funkcia f je surjektívna. Voľbou $y = -f(x)$ v danej rovnici dostaneme

$$f(0) - 2x = f(f(-f(x)) - x).$$

Pretože každé reálne číslo možno vyjadriť v tvare $f(0) - 2x$, existuje pre každé $y \in \mathbb{R}$ také $z \in \mathbb{R}$, že platí $y = f(z)$. Špeciálne potom existuje $a \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí $f(a) = 0$. Voľbou $x = a$ v danej funkcionálnej rovnici dostaneme

$$f(y) = 2a + f(f(y) - a) \quad \text{t. j.} \quad f(y) - a = f(f(y) - a) + a.$$

Pretože funkcia f je surjektívna, existuje pre každé $x \in \mathbb{R}$ také $y \in \mathbb{R}$, že $x = f(y) - a$. Odtiaľ vyplýva, že pre každé x reálne platí $x = f(x) + a$, t. j. $f(x) = x - a$. Tým je úloha vyriešená.