2001/2002
51. ročník MO *Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

1. *Nech a, b sú rôzne reálne čísla a k, m prirodzené čísla, pre ktoré platí $k+m=n\geqq 3$, $k\leqq 2m$ a $m\leqq 2k$. Uvažujme postupnosti $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, ktoré vyhovujú nasledujúcim podmienkam:*

k členov postupnosti sa rovná a, pritom $x_1=a$;
m členov postupnosti sa rovná b; pritom $x_n=b$;
žiadne tri po sebe idúce členy nie sú rovnaké.

Určte všetky možné hodnoty súčtu

$$x_nx_1x_2+x_1x_2x_3+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n+x_{n-1}x_nx_1.$$

Riešenie. Uvažujme postupnosť $(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)$, ktorá vyhovuje podmienkam úlohy. Pre ľubovoľné jej tri po sebe idúce členy x, y, z existuje taká ich permutácia (x,y,z), pre ktorú platí buď $(x,y,z)=(a,a,b)$, alebo $(x,y,z)=(a,b,b)$. V oboch týchto prípadoch je $xyz=ab(x+y+z-a-b)$. Položme ešte $x_0=x_n$ a $x_{n+1}=x_1$. Potom pre hľadaný súčet platí

$$\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}x_ix_{i+1}=ab\Big(3\sum_{i=1}^{n}x_i-n(a+b)\Big)=\big((2k-m)a+(2m-k)b\big)ab.$$

Teraz ukážeme, že pre ľubovoľné dve prirodzené čísla k, m, ktoré vyhovujú daným podmienkam, existuje aspoň jedna postupnosť $(x_1,\dots,x_n)$ spĺňajúca požadované podmienky. Nech napr. $2m\geqq k\geqq m$ (v prípade $2k\geqq m\geqq k$ budeme postupovať analogicky) a uvažujme postupnosť $3m$ trojíc (a,a,b) napísaných v rade za sebou, t. j. postupnosť

$$(a,a,b,a,a,b,\dots,a,a,b).$$

Táto postupnosť obsahuje $2m$ čísel a a m čísel b. Ak vyškrtneme napr. v prvých $2m-k$ trojiciach (a,a,b) vždy jedno a, dostaneme postupnosť $n=k+m$ prvkov, ktorá zrejme vyhovuje podmienkam úlohy.

Záver. Pre všetky postupnosti, ktoré vyhovujú podmienkam úlohy, je hodnota uvažovaného súčtu vždy $\big((2k-m)a+(2m-k)b\big)ab$.

2. *Daný je trojuholník ABC, ktorého obsah je S. Pre jeho dĺžky strán $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$ platí $a\leqq b\leqq c$. Určte najväčšie reálne číslo u a najmenšie reálne číslo v tak, aby pre každý vnútorný bod P trojuholníka ABC bola splnená nerovnosť*

$$u\leqq|PD|+|PE|+|PF|\leqq v,$$

kde D, E, F sú po rade priesečníky priamok AP, BP, CP s protiľahlými stranami daného trojuholníka. (Hodnoty u, v vyjadrite pomocou daných veličín a, b, c a S.)

Riešenie. Uvažujme ľubovoľný vnútorný bod P trojuholníka ABC a body D, E, F podľa zadania. Označme obsahy trojuholníkov PBC, PCA, PAB po rade S_a, S_b, S_c.

Z podmienok úlohy vyplýva $2S_a \leqq a \cdot |PD| \leqq c \cdot |PD|$, $2S_b \leqq b \cdot |PE| \leqq c \cdot |PE|$ a $2S_c \leqq c \cdot |PF|$. Platí teda dolný odhad

$$|PD| + |PE| + |PF| \geqq \frac{2(S_a + S_b + S_c)}{c} = \frac{2S}{c} = v_c,$$

kde v_c označuje veľkosť výšky z vrcholu C v trojuholníku ABC. Keď teraz uvažujeme bod P tejto výšky ľubovoľne blízko vrcholu C, vidíme, že aj hodnota súčtu $|PD| + |PE| + |PF|$ sa ľubovoľne približuje dĺžke výšky v_c. Najväčšia hodnota u, ktorá vyhovuje podmienkam úlohy, je teda $u = v_c = 2S/c$.

Teraz stanovíme horný odhad uvažovaného súčtu. Najskôr si uvedomme, že úsečka AB (dĺžky c) je najdlhšia (jedna z najdlhších) medzi všetkými úsečkami, ktorých krajnými bodmi sú niektoré dva body trojuholníka ABC (špeciálne má väčšiu dĺžku ako každá z úsečiek AD, BE, CF). Platí preto

$$\frac{S_a}{S} = \frac{|PD|}{|AD|} \geqq \frac{|PD|}{c}, \quad \text{t. j.} \quad |PD| \leqq c\,\frac{S_a}{S}.$$

Analogicky potom

$$|PE| \leqq c\,\frac{S_b}{S} \qquad \text{a} \qquad |PF| \leqq c\,\frac{S_c}{S}.$$

Súčtom všetkých troch nerovností dostaneme

$$|PD| + |PE| + |PF| \leqq c\left(\frac{S_a}{S} + \frac{S_b}{S} + \frac{S_c}{S}\right) = c.$$

Keď teraz zvolíme bod P (vnútri trojuholníka ABC) ľubovoľne blízko vrcholu A tak, aby veľkosť uhla PAB bola ľubovoľne malá, ľahko nahliadneme, že aj hodnota uvažovaného súčtu sa bude ľubovoľne blížiť dĺžke c strany AB. S ohľadom na získaný horný odhad pre súčet $|PD| + |PE| + |PF|$ je teda najmenšia hodnota v vyhovujúca podmienkam úlohy $v = c$.

---

3. *Nech* $\mathsf{S} = \{1, 2, \dots, n\}$, *kde* n *je dané prirodzené číslo. Určte počet všetkých funkcií* $f : \mathsf{S} \to \mathsf{S}$ *takých, že pre každé* $x \in \mathsf{S}$ *platí* $x + f^4(x) = n + 1$. *(Symbol* f^4 *označuje štvrtú iteráciu, t. j.* $f^4(x) = f(f(f(f(x))))$.*)*

Riešenie. Pre každé $x \in \mathsf{S}$ označme $x^* = n + 1 - x$, kde pre zobrazenie $x \mapsto x^*$ platí $x^{**} = x$. Nech $f : \mathsf{S} \to \mathsf{S}$ je funkcia vyhovujúca podmienkam úlohy. Pretože $f^4(x) = x^*$, je $f^8(x) = x$. Z podmienok úlohy vyplýva, že funkcia f je prostá, a teda bijektívna (jedná sa teda o permutáciu na množine S). Množinu S možno preto rozložiť na *cykly*, ktorých dĺžky sú delitele čísla 8. Ak x_0 leží v cykle dĺžky 4, 2 alebo 1, tak $x_0 = f^4(x_0) = x_0^*$, preto $x_0 = (n + 1)/2$. To je možné iba pre nepárne n, potom ale všetky prvky uvažovaného cyklu musia byť rovné x_0. Odtiaľ vyplýva, že S je zjednotením niekoľkých disjunktných cyklov dĺžky 8, prípadne naviac obsahuje izolovaný prvok x_0. Platí teda $n = 8m$ alebo $n = 8m + 1$, kde m je prirodzené číslo.

Uvažujme najprv $n = 8m$. Označme $\mathsf{A} = \{1, \dots, 4m\}$ a $\mathsf{B} = \{4m + 1, \dots, 8m\}$. Uvažujme teraz určitý cyklus dĺžky 8 a označme C množinu jeho prvkov. Potom $\mathsf{A} \cap \mathsf{C}$

je štvorprvková množina a $\mathsf{B} \cap \mathsf{C}$ je jej *-obraz. Naopak, pre každú štvoricu $1 \leqq a < b < c < d \leqq 4m$ možno vytvoriť množinu $\mathsf{C} = \{a, b, c, d, d^*, c^*, b^*, a^*\}$, ktorej prvky tvoria cyklus dĺžky 8. Ďalej určíme, koľkými spôsobmi možno vytvoriť taký cyklus dĺžky 8 na množine C. Nech $f(a) = w$, potom w môže byť ľubovoľný prvok množiny C s výnimkou prvkov a a a^* (šesť možností); ďalej nech $f(w) = z$, potom z môže byť ľubovoľný prvok C s výnimkou prvkov a, a^*, w, w^* (štyri možnosti); konečne $f(z)$ môže byť ľubovoľný prvok C s výnimkou prvkov a, a^*, w, w^*, z a z^* (dve možnosti). Zvyšok cyklu je už potom určený. Celkovo tak máme $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ možností.

Každej funkcii f daných vlastností tak možno jednoznačným spôsobom priradiť rozklad $4m$-prvkovej množiny A na m štvoríc. Spočítame, koľko takých rozkladov existuje. Množina A má $\binom{4m}{4}$ rôznych štvorprvkových podmnožín, prvú štvoricu rozkladu môžeme teda vybrať $\binom{4m}{4}$ spôsobmi, druhú $\binom{4m-4}{4}$ spôsobmi, atď. Celkom tak máme

$$\binom{4m}{4}\binom{4m-4}{4}\cdots\binom{12}{4}\binom{8}{4} = \frac{(4m)!}{4!^m}$$

možností. Pretože nezáleží na poradí, v akom m štvoríc rozkladu vyberáme, je vždy $m!$ rozkladov rovnakých. Celkom teda existuje

$$\frac{(4m)!}{(4!)^m m!}$$

rôznych rozkladov množiny A na m (neusporiadaných) štvoríc. Každú takú štvoricu prvkov množiny A doplníme zodpovedajúcimi *-obrazmi z množiny B. Získame tak jeden z možných cyklov dĺžky 8. Na každom takom cykle môžeme funkciu f definovať 48 spôsobmi, pre daný rozklad tak existuje celkom $48^m = (2 \cdot 4!)^m$ možností, ako definovať funkciu f. Celkový počet funkcií f vyhovujúcich podmienkam úlohy je teda

$$(2 \cdot 4!)^m \cdot \frac{(4m)!}{(4!)^m m!} = \frac{2^m (4m)!}{m!}.$$

V prípade $n = 8m + 1$ je nutné uvažovať izolovane prvok $x_0 = (n+1)/2$ a na množine $\mathsf{S} \setminus \{x_0\}$ môžeme postupovať analogicky ako v prípade $n = 8m$ (s rovnakým výsledkom). Pokiaľ $n \not\equiv 0, 1 \pmod 8$, žiadna funkcia f vyhovujúca podmienkam úlohy neexistuje.

---

4. *Nech $n > 1$ je prirodzené číslo a p prvočíslo také, že n je deliteľom čísla $p-1$ a súčasne p je deliteľom čísla $n^3 - 1$. Dokážte, že $4p - 3$ je druhou mocninou prirodzeného čísla.*

Riešenie. Podľa zadania $p - 1 \geqq n$, čiže $p \geqq n + 1$. Pretože p je deliteľom čísla $n^3 - 1 = (n-1)(n^2+n+1)$, je nutne deliteľom n^2+n+1, t. j. $n^2+n+1 = mp$, kde m je prirodzené číslo. Preto $mp \equiv 1 \pmod n$ a podľa predpokladu úlohy aj $p \equiv 1 \pmod n$. Z oboch predchádzajúcich kongruencií vyplýva $m \equiv 1 \pmod n$. Platí teda $m = kn + 1$ a $p = \ell n + 1$, kde k a $\ell \geqq 1$ sú nezáporné celé čísla, takže $n^2 + n + 1 = mp = (kn + 1)(\ell n + 1)$ a po úprave $n(1 - k\ell) = k + \ell - 1 \geqq 0$. Poslednej rovnosti a nerovnosti vyhovuje iba $k = 0$. Odtiaľ vyplýva $m = 1$, $p = n^2 + n + 1$, a teda $4p - 3 = (2n+1)^2$. Tým je dôkaz ukončený.

5. *Nech O označuje stred kružnice opísanej ostrouhlému trojuholníku ABC. Body P, Q nech sú po rade takými bodmi jeho strán AC, BC, pre ktoré súčasne platí*

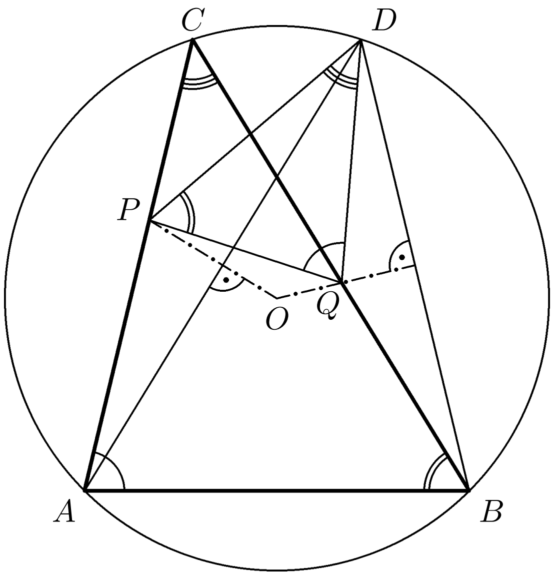
$$\frac{|AP|}{|PQ|} = \frac{|BC|}{|AB|} \qquad \text{a} \qquad \frac{|BQ|}{|PQ|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Dokážte, že body O, P, Q a C ležia na jednej kružnici.

Riešenie. Uvažujme zvyčajné označenie uhlov v trojuholníku ABC. Nech platí napr. $\alpha \geqq \beta$. Uvažujme trojuholník QPD, ktorý je zvonka pripísaný strane QP štvoruholníka $ABQP$ a je podobný trojuholníku ABC. Potom platí (obr. 1)

$$\frac{|PD|}{|PQ|} = \frac{|BC|}{|AB|} \qquad \text{a} \qquad \frac{|QD|}{|PQ|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Z daných podmienok vyplýva $|PD| = |PA|$ a $|QB| = |QD|$. Na základe predpokladu



Obr. 1

$\alpha \geqq \beta$ ďalej máme

$$\frac{|AP|}{|BQ|} = \frac{|PD|}{|QD|} = \frac{|BC|}{|AC|} \geqq 1, \qquad \text{t. j.} \qquad |AP| \geqq |BQ|.$$

V trojuholníku CPQ teda platí $|CP| \leqq |CQ|$ a tiež

$$|\measuredangle CQP| \leqq \frac{180^\circ - \gamma}{2} \leqq \alpha = |\measuredangle DQP|,$$
$$|\measuredangle CPQ| \geqq \frac{180^\circ - \gamma}{2} \geqq \beta = |\measuredangle DPQ|.$$

Z oboch posledných nerovností je zrejmé, že D je vnútorným bodom konvexného uhla BCX, kde X leží na polpriamke AC za bodom C.

Označme teraz veľkosti vnútorných uhlov pri základniach rovnoramenných trojuholníkov ADP a BDQ po rade φ a ψ. Veľkosti vnútorných uhlov v štvoruholníku $ABDP$ majú potom po rade veľkosti α, $\beta+\psi$, $\gamma+\psi$ a $180^\circ-2\varphi$. Pretože ich súčet je 360°, platí $\varphi=\psi$, a teda $|\measuredangle ADB|=\gamma$. Bod D teda leží na oblúku BC kružnice opísanej trojuholníku ABC. Vzhľadom k tomu, že oba trojuholníky ADP a BDQ sú rovnoramenné (so základňami AD a BD), sú priamky OP a OQ osi strán AD a BD trojuholníka ABD. Pretože stred O kružnice opísanej trojuholníku ABC je jeho vnútorným bodom, vyplýva odtiaľ bezprostredne

$$|\measuredangle POQ| = 180^\circ - |\measuredangle ADB| = 180^\circ - |\measuredangle PDQ| = 180^\circ - \gamma.$$

Platí preto $|\measuredangle PCQ| + |\measuredangle POQ| = 180^\circ$, čo znamená, že body O, P, C a Q ležia na jednej kružnici.

Analogicky možno dokázať tvrdenie v prípade, keď $\alpha \leqq \beta$. Tým je úloha vyriešená.

---

6. *Nech $n \geqq 2$ je párne prirodzené číslo. Uvažujme polynómy tvaru*

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + 1$$

s reálnymi koeficientmi, ktoré majú aspoň jeden reálny koreň. Určte najmenšiu možnú hodnotu súčtu $a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2$.

Riešenie. Nech u je reálny koreň rovnice $P(x)=0$. Jej úpravou a ďalej potom využitím Cauchyho nerovnosti dostaneme

$$(u^n+1)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_iu^i\right)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} u^{2i}. \tag{1}$$

Keď položíme $n=2m$ a $u^2=w$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} u^{2i} = \sum_{i=1}^{2m-1} w^i = w^m + (w^m+1)\sum_{i=1}^{m-1} w^i. \tag{2}$$

Z toho, že pre ľubovoľné $i \in \{1,2,\dots,m-1\}$ platí nerovnosť $(w^i-1)(w^{m-i}-1) \geqq 0$, vyplýva po jednoduchej úprave

$$w^i + w^{m-i} \leqq w^m + 1.$$

Súčtom všetkých týchto nerovností pre $1 \leqq i \leqq m-1$ dostaneme

$$2\sum_{i=1}^{m-1} w^i \leqq (m-1)(w^m+1).$$

Z nerovnosti $(w^m-1)^2 \geqq 0$ ďalej vyplýva $w^m \leqq \frac{1}{4}(w^m+1)^2$. Dosadením získaných nerovností do (2) dostaneme odhad

$$\sum_{i=1}^{n-1} u^{2i} \leqq \frac{(w^m+1)^2}{4} + (w^m+1)\cdot\frac{m-1}{2}(w^m+1) = \frac{n-1}{4}(u^n+1)^2,$$

ktorý využijeme v (1). Po úprave ihneď vyjde

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \geqq \frac{4}{n-1}.$$

Rovnosť, s ohľadom na použité nerovnosti, nastáva práve vtedy, keď $u=1$ a $a_1 = \ldots = a_{n-1}$, t. j. práve vtedy, keď $a_i = -2/(n-1)$ pre všetky $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$.