2001/2002
51. ročník Matematickej olympiády *Riešenia úloh IMO*

1. *Nech n je prirodzené číslo a nech T je množina všetkých bodov (x, y) v rovine, kde x a y sú celé nezáporné čísla a $x + y < n$. Každý bod z množiny T je ofarbený buď červenou, alebo modrou farbou. Ak je bod (x, y) červený, sú červené aj všetky body $(x', y') \in \mathsf{T}$, pre ktoré platí $x' \leqq x$ a $y' \leqq y$. Definujme X-množinu ako množinu n modrých bodov majúcich rôzne x-ové súradnice a Y-množinu ako množinu n modrých bodov majúcich rôzne y-ové súradnice. Dokážte, že počet X-množín je rovný počtu Y-množín.* (Kolumbia)

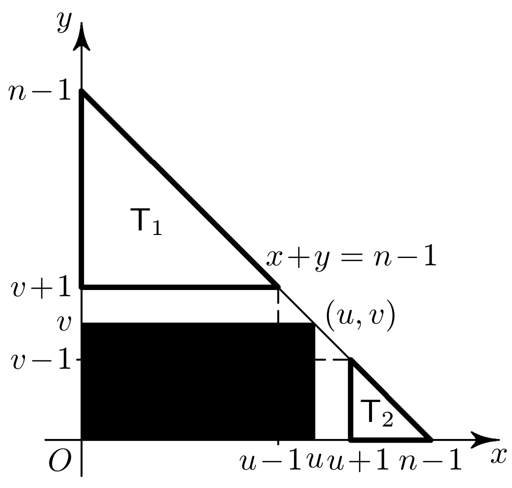
Riešenie. Pre každé $i = 0, 1, \dots , n$ označme a_i (resp. b_i) počet modrých bodov s x-ovou (resp. y-ovou) súradnicou rovnou číslu i. Pretože X-množina je každá množina modrých bodov, ktorých x-ové súradnice sú čísla $0, 1, \dots , n - 1$ (každé práve raz), je počet všetkých X-množín rovný súčinu $a_0a_1 \dots a_{n-1}$; podobne počet všetkých Y-množín je rovný súčinu $b_0b_1 \dots b_{n-1}$. Našou úlohou je dokázať rovnosť

$$a_0a_1 \dots a_{n-1} = b_0b_1 \dots b_{n-1}. \tag{1}$$

Ukážeme, že na oboch stranách (1) sú dva rovnaké súbory činiteľov, ktoré sa môžu líšiť iba poradím, čo budeme zapisovať ako rovnosť neusporiadaných n-tíc

$$[a_0, a_1, \dots , a_{n-1}] = [b_0, b_1, \dots , b_{n-1}]. \tag{2}$$

Rovnosť (2) dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na číslo n. Predstavme si, že body z T sú rozdelené do skupín na jednotlivých priamkach $x + y = k$ ($0 \leqq k \leqq n - 1$). Ak $n = 1$, je všetko jasné, vtedy totiž platí buď $a_0 = b_0 = 1$, alebo $a_0 = b_0 = 0$ (podľa toho, či je bod $(0, 0)$ modrý, alebo červený). Predpokladajme teraz, že $n > 1$. Ak je červený niektorý bod (u, v) na „krajnej“ priamke $x + y = n - 1$, môžeme použiť indukčný predpoklad pre množiny mrežových bodov ležiacich v trojuholníkoch T_1 a T_2 z obr. 1 (ostatné body z T ležia vo vyfarbenom obdĺžniku a sú všetky ako bod (u, v) červené). Pre množinu T_1 platí rovnosť u-tic $[a_0, a_1, \dots , a_{u-1}] = [b_{v+1}, b_{v+2}, \dots , b_{n-1}]$, pre množinu T_2 zasa rovnosť v-tic $[a_{u+1}, a_{u+2}, \dots , a_{n-1}] = [b_0, b_1, \dots , b_{v-1}]$; pretože naviac $a_u = b_v = 0$, je rovnosť (2) dokázaná.



Obr. 1

Ak sú naopak na priamke $x+y=n-1$ iba modré body, odstránime ich z množiny T a pre redukovanú množinu $\mathsf{T}'=\{(x,y)\in\mathsf{T}: x+y<n-1\}$ využijeme indukčný predpoklad. Keď priradíme množine T' čísla a_i', b_i' $(0\leqq i\leqq n-2)$ rovnako, ako sme skôr priradili čísla a_i, b_i množine T, sú $(n-1)$-tice $[a_0', a_1', \dots, a_{n-2}']$ a $[b_0', b_1', \dots, b_{n-2}']$ zhodné; vzhľadom na modré body na priamke $x+y=n-1$ však máme $a_i=a_i'+1$ a $b_i=b_i'+1$ $(0\leqq i\leqq n-2)$ a k tomu ešte $a_{n-1}=b_{n-1}=1$, takže rovnosť (2) platí aj v tomto prípade. Dôkaz indukciou je ukončený a úloha je vyriešená.

Iné riešenie. (Podľa *Jaroslava Hájka.*) Pretože všetky čísla a_i a b_j ležia v množine $\{0,1,\dots,n\}$, stačí dokázať, že pre každý jej prvok k je počet indexov i s vlastnosťou $a_i=k$ rovný počtu indexov j s vlastnosťou $b_j=k$. Z podmienky úlohy zrejme vyplýva, že ľubovoľný bod $(i,j)\in\mathsf{T}$ je modrý práve vtedy, keď spolu s ním sú modré aj všetky body z T nad ním a vpravo od neho. Preto počet indexov i s vlastnosťou $a_i=k$ dostaneme, keď od počtu p_k modrých bodov na priamke $x+y=n-k$ odpočítame počet p_{k+1} modrých bodov na priamke $x+y=n-(k+1)$; pritom kladieme $p_0=n$ a $p_{n+1}=0$, aby sme „ošetrili“ aj krajné hodnoty $k=0$ a $k=n$. Rovnakému rozdielu p_k-p_{k+1} je však rovný aj počet indexov j s vlastnosťou $b_j=k$. Tým sme dokázali rovnosť (2), a teda aj tvrdenie úlohy.

Iné riešenie. (Podľa *Tomáša Protivínského.*) Všetky červené body z T (pokiaľ vôbec existujú, inak je (1) triviálne splnená) zrejme vyplnia zjednotenie niekoľkých (povedzme q) obdĺžnikov $0\leqq x\leqq u_i$, $0\leqq y\leqq v_i$, ktorých (červené) pravé horné vrcholy (u_i,v_i) $(1\leqq i\leqq q)$ očíslujeme tak, aby platilo $0\leqq u_1<u_2<\ldots<u_q\leqq n-1$ a $n-1\geqq v_1>v_2>\ldots>v_q\geqq 1$ (obr. 2). Ak niektorý bod (u_i,v_i) leží na priamke $x+y=n-1$, platí $a_{u_i}=b_{v_i}=0$, takže súčiny na oboch stranách (1) sú nulové. Preto ďalej predpokladajme, že $u_i+v_i<n-1$ pre každé $i\in\{1,2,\dots,q\}$ (odtiaľ o. i. vyplýva, že $u_q<n-1$ a $v_1<n-1$). Teraz ľahko vyjadríme (kladné) počty a_i v jednotlivých intervaloch $0\leqq i\leqq u_1$, $u_1<i\leqq u_2$, $\dots$, $u_q<i\leqq n-1$ ako počty bodov z T, ktoré ležia nad hornou stranou príslušného „červeného“ obdĺžnika.

$$\begin{aligned}
a_i &= n-1-i-v_1 \quad (0\leqq i\leqq u_1),\\
a_i &= n-1-i-v_2 \quad (u_1<i\leqq u_2),\\
&\ \vdots\\
a_i &= n-1-i-v_q \quad (u_{q-1}<i\leqq u_q),\\
a_i &= n-1-i+1 \quad (u_q<i\leqq n-1).
\end{aligned}$$

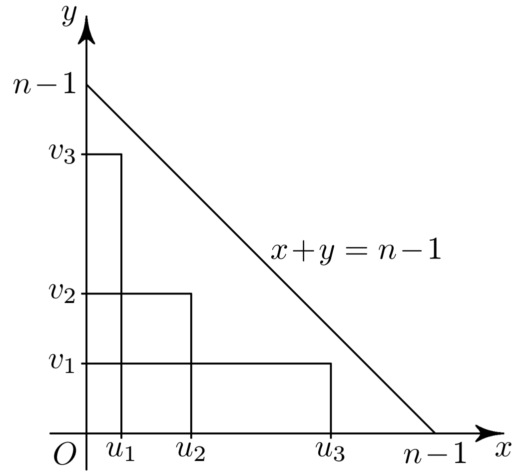
čiže

$$a_i=n-1-i-v_{s+1} \quad (u_s<i\leqq u_{s+1},\ 0\leqq s\leqq q),$$

kde naviac kladieme $u_0=v_{q+1}=-1$, $v_0=u_{q+1}=n-1$. Dostávame tak

$$\prod_{i=0}^{n-1}a_i=\prod_{s=0}^{q}\prod_{i=u_s+1}^{u_{s+1}}(n-1-i-v_{s+1})=\prod_{s=0}^{q}\frac{(n-2-u_s-v_{s+1})!}{(n-2-u_{s+1}-v_{s+1})!},$$

kde sme využili to, že každý súčin $c(c+1)(c+2)\dots(c+d)$ niekoľkých po sebe idúcich prirodzených čísel je rovný podielu faktoriálov $(c+d)!/(c-1)!$, pričom $0!=1$. Premyslite



Obr. 2

si sami podľa obr. 2, aký geometrický význam majú hodnoty $c = n - 1 - u_{s+1} - v_{s+1}$ a $c + d = n - 2 - u_s - v_{s+1}$.

Pre čísla b_j platí analogické vyjadrenie

$$b_j = n - 1 - j - u_s \quad (v_{s+1} < j \leqq v_s,\ 0 \leqq s \leqq q),$$

takže ich súčin je rovný

$$\prod_{j=0}^{n-1} b_j = \prod_{s=0}^{q} \prod_{j=v_{s+1}+1}^{v_s} (n - 1 - j - u_s) = \prod_{s=0}^{q} \frac{(n - 2 - u_s - v_{s+1})!}{(n - 2 - u_s - v_s)!}.$$

Vidíme, že nájdené „faktoriálové" vyjadrenia oboch súčinov z (1) sa líšia iba v menovateľoch, a to o činitele $(n-2-u_s-v_s)!$ pre $s = 0$ a $s = q+1$, ktoré sú však oba rovné $0! = 1$. Dôkaz rovnosti (1) je tak dokončený.

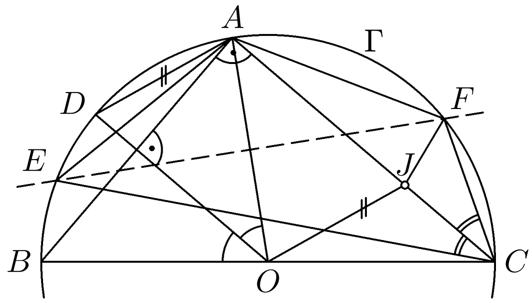
---

2. *Nech BC je priemer kružnice Γ so stredom O. Bod A leží na kružnici Γ tak, že $0° < |\measuredangle AOB| < 120°$. Nech D je stred toho oblúka AB, na ktorom neleží bod C. Priamka vedená bodom O rovnobežne s DA pretne priamku AC v bode J. Os úsečky OA pretne kružnicu Γ v bodoch E a F. Dokážte, že bod J je stred kružnice vpísanej trojuholníku CEF.* (Južná Kórea)

Riešenie. Na dôkaz tvrdenia potrebujeme ukázať, že bod J leží jednak na osi uhla ECF, jednak na osi uhla EFC. Úsečky AE a AF majú dĺžku rovnú polomeru r kružnice Γ, lebo sú súmerne združené s jej priemermi OE a OF (obr. 3). Zo zhodnosti tetív AE a AF vyplýva zhodnosť obvodových uhlov ECA a FCA, preto bod A, a teda aj bod J, leží na osi uhla ECF.

Podľa Tálesovej vety je uhol BAC nad priemerom BC pravý, a pretože OD je os úsečky AD, $OD \parallel AJ$, čo spolu s $OJ \parallel DA$ znamená, že $OJAD$ je rovnobežník. Preto $|AJ| = |OD| = r$, čo spolu s rovnosťou $|AE| = |AF| = r$ znamená, že trojuholník JFA je rovnoramenný. Zo zhodnosti uhlov JFA a AJF potom vyplýva

$$\begin{aligned}|\measuredangle JFE| &= |\measuredangle JFA| - |\measuredangle EFA| = |\measuredangle AJF| - |\measuredangle ECA| = \\ &= |\measuredangle AJF| - |\measuredangle JCF| = |\measuredangle JFC|.\end{aligned}$$

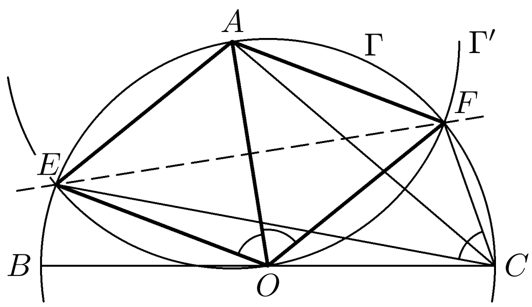


Obr. 3

To znamená, že bod J leží na osi uhla EFC.

V prvej rovnosti práve prevedenej úpravy sme využili to, že bod J je vnútorným bodom trojuholníka CEF. To zaručuje podmienka $|\measuredangle AOB| < 120°$, lebo potom leží bod D vnútri oblúka EA (trojuholník EOA je rovnostranný), teda „nad“ osou EF uhlopriečky OA rovnobežníka $OJAD$, takže jeho protiľahlý vrchol J leží v polrovine $EFO = EFC$. (Ako ľahko zistíme, pre bod A taký, že $|\measuredangle AOB| = 120°$, vyjde $J = C$ a pre $|\measuredangle AOB| > 120°$ už bod J padne dokonca mimo kruhu ohraničeného kružnicou Γ.)

Iné riešenie. Rovnako ako v predchádzajúcom riešení zistíme, že bod J leží na osi uhla ECF a že $OJAD$ je rovnobežník. Zo súmernosti podľa EF naviac vyplýva $|AE| = |OE| = |OA|$, takže AEO a AFO sú zhodné rovnostranné trojuholníky, t. j. $|\measuredangle EOF| = 120°$. Odtiaľ jednak vyplýva, že uhol ECF má veľkosť $60°$, jednak vidíme, že body O a J ležia na kružnici $\Gamma' = (A; |AO|)$ (obr. 4), ktorej tetive EF prislúcha



Obr. 4

obvodový uhol $120°$. Ak je I stred kružnice vpísanej trojuholníku CEF, leží, ako už vieme, na polpriamke CA. Pre veľkosť uhla EIF potom máme

$$|\measuredangle EIF| = 180° - \tfrac{1}{2}|\measuredangle CEF| - \tfrac{1}{2}|\measuredangle CFE| = 90° + \tfrac{1}{2}|\measuredangle ECF| = 120°,$$

čo znamená, že aj bod I leží na kružnici Γ'. Tá však pretína úsečku AC v jedinom bode, preto $J = I$.

---

3. *Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel $m, n \geqq 3$ také, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel a, pre ktoré je*

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

celé číslo. (*Rumunsko*)

Riešenie. Predpokladajme, že dvojica prirodzených čísel (m,n) má požadovanú vlastnosť. Zrejme platí $m>n$, v prípade $m \leqq n$ by totiž pre každé $a>1$ platilo

$$0<\frac{a^m+a-1}{a^n+a^2-1}<1.$$

Pri delení mnohočlena $F(x)=x^m+x-1$ mnohočlenom $G(x)=x^n+x^2-1$ nájdeme mnohočleny Q, R s celočíselnými koeficientmi spĺňajúce rovnosť $F(x)=Q(x)G(x)+R(x)$, pričom stupeň mnohočlena R je menší ako stupeň G. To znamená, že

$$\frac{R(x)}{G(x)} \to 0 \quad \text{pre } x\to\infty, \tag{1}$$

zároveň však z rovnosti

$$\frac{F(a)}{G(a)}=Q(a)+\frac{R(a)}{G(a)}$$

podľa podmienky úlohy vyplýva, že podiel $R(a)/G(a)$ je celé číslo pre nekonečne veľa prirodzených čísel a. To vzhľadom k (1) znamená, že len pre konečný počet z nich je $R(a)/G(a)\neq 0$, takže mnohočlen R má nekonečne veľa koreňov, je teda nulový, t. j. $R(x)=0$ pre každé x. Ak teraz označíme $k=m-n>0$, tak z vyjadrenia

$$Q(x)=\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{x^{n+k}+x-1}{x^n+x^2-1}=x^k+\frac{-x^{k+2}+x^k+x-1}{x^n+x^2-1} \tag{2}$$

vyplýva, že mnohočlen $G(x)=x^n+x^2-1$ delí mnohočlen $-x^{k+2}+x^k+x-1$, ktorý možno rozložiť na súčin $(1-x)(x^{k+1}+x^k-1)$. Pretože $G(1)=1\neq 0$, mnohočlen $G(x)$ delí dokonca mnohočlen $H(x)=x^{k+1}+x^k-1$, medzi ich stupňami preto platí vzťah $n\leqq k+1$. Z nerovností $G(0)=-1<0$ a $G(1)=1>0$ vyplýva, že $G(s)=0$ pre niektoré reálne číslo $s\in(0,1)$. Potom však tiež $H(s)=0$, takže $s^n+s^2-1=s^{k+1}+s^k-1$, čiže $s^n-s^{k+1}=s^k-s^2$. Ľavá strana poslednej rovnosti je nezáporná (platí totiž $0<s<1$ a $n\leqq k+1$), takže podľa pravej strany musí platiť $k\leqq 2$. Podľa zadania úlohy však platí $n\geqq 3$, teda z nerovností $n\leqq k+1$ a $k\leqq 2$ vychádza $n=3$ a $k=2$, odkiaľ $m=n+k=5$. Dvojica $(m,n)=(5,3)$ má naozaj požadovanú vlastnosť, lebo

$$\frac{x^5+x-1}{x^3+x^2-1}=x^2-x+1.$$

Poznámka. Podané riešenie vyzerá zdanlivo jednoducho. Rozhodujúcim obratom je „čiastočné“ vydelenie (2), bez ktorého by sme následným postupom došli k rovnosti $s^{n+k}+s=s^n+s^2$, ktorej rozbor (pôvodné autorské riešenie) je veľmi náročný. Úpravu (2) a jej účinnosť objavil ešte pred vlastnou súťažou vedúci bulharskej delegácie *Sava Grozdev*. Nezmenilo to však nič na názore poroty, že úloha je najnáročnejšia z celej vybranej šestice. Výsledky súťažiacich to potvrdili.

4. *Nech n je prirodzené číslo väčšie ako 1. Všetky kladné delitele čísla n označíme $d_1, d_2, \ldots, d_k$, kde*

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n.$$

Položme $D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots + d_{k-1} d_k$.

(a) Dokážte, že $D < n^2$.

(b) Určte všetky n, pre ktoré je číslo D deliteľom čísla n^2. (*Rumunsko*)

Riešenie. a) Ak patrí číslo d k deliteľom čísla n, patrí k nim aj číslo n/d. Preto je rastúca k-tica deliteľov $n/d_k, n/d_{k-1}, \ldots, n/d_1$ zhodná s pôvodnou rastúcou k-ticou (všetkých) deliteľov $d_1, d_2, \ldots, d_k$. Vzhľadom na zrejmé nerovnosti $k \leqq n$ a $d_j \geqq j$ preto platí

$$\begin{aligned} D &= d_1 d_2 + d_2 d_3 + \cdots + d_{k-1} d_k = \\ &= \frac{n}{d_k} \cdot \frac{n}{d_{k-1}} + \frac{n}{d_{k-1}} \cdot \frac{n}{d_{k-2}} + \cdots + \frac{n}{d_2} \cdot \frac{n}{d_1} = \\ &= n^2 \Big(\frac{1}{d_1 d_2} + \frac{1}{d_2 d_3} + \cdots + \frac{1}{d_{k-1} d_k} \Big) \leqq \\ &\leqq n^2 \Big(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \Big) = \\ &= n^2 \Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \Big) = \\ &= n^2 \Big(1 - \frac{1}{n} \Big) < n^2. \end{aligned}$$

b) Ukážeme, že číslo D delí číslo n práve vtedy, keď n je prvočíslo. Ak je n prvočíslo, potom $k = 2$, $d_1 = 1$, $d_2 = n$ a $D = 1 \cdot n = n$, čo je skutočne deliteľ čísla n^2. Predpokladajme ďalej, že číslo n je zložené a označme p jeho najmenší prvočíselný deliteľ. Potom platí $k > 2$ a $d_{k-1} = n/p$, odkiaľ dostávame

$$D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \cdots + d_{k-1} d_k > d_{k-1} d_k = \frac{n}{p} \cdot n = \frac{n^2}{p},$$

čo spolu s dokázanou časťou a) vedie k odhadu $n^2/p < D < n^2$. Odtiaľ už vyplýva, že D nedelí n^2, lebo číslo n^2/p je po čísle n^2 druhý najväčší deliteľ čísla n^2.

5. *Nech $\mathbb{R}$ označuje množinu všetkých reálnych čísel. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že*

$$\big(f(x) + f(z)\big)\big(f(y) + f(t)\big) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

pre ľubovoľné $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. (*India*)

Riešenie. Ľahko overíme, že medzi funkcie spĺňajúce danú funkcionálnu rovnicu patria funkcie určené vzťahmi $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 1/2$ a $f_3(x) = x^2$. Ukážeme, že žiadna iná funkcia f požadovanú vlastnosť nemá.

Dosadením $x = y = z = 0$ do danej rovnice dostaneme $2f(0)\big(f(0) + f(t)\big) = 2f(0)$ pre každé t. Špeciálne pre $t = 0$ vychádza $4f(0)^2 = 2f(0)$, takže buď $f(0) = 0$, alebo $f(0) = 1/2$. V prípade $f(0) = 1/2$ podľa predošlého platí $1/2 + f(t) = 1$, a teda $f(t) = 1/2$ pre každé t.

Predpokladajme teraz, že $f(0) = 0$. Voľbou $z = t = 0$ v danej rovnici dostaneme $f(xy) = f(x)f(y)$ pre ľubovoľné x, y. Takú funkciu f nazývame multiplikatívna. Špeciálne platí $f(1) = f(1)^2$, takže buď $f(1) = 0$, alebo $f(1) = 1$. V prípade $f(1) = 0$ však $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x) \cdot f(1) = 0$, t. j. $f(x) = 0$ pre každé x.

Zostáva teda preskúmať prípad, keď $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$. Keď dosadíme $x = 0$ a $y = t = 1$ do (1), dostaneme $2f(z) = f(-z) + f(z)$, čiže $f(z) = f(-z)$ pre každé z, to znamená, že f je párna funkcia. Ak teda ďalej ukážeme, že $f(x) = x^2$ pre každé $x > 0$, bude rovnaký vzťah platiť pre každé reálne číslo x. Keď v danej rovnici položíme $y = z = t = 1$, dostaneme pre každé x rovnosť

$$2(f(x) + 1) = f(x - 1) + f(x + 1),$$

z ktorej možno vypočítať hodnotu $f(x+1)$, ak poznáme hodnoty $f(x)$ a $f(x - 1)$. Týmto postupom možno jednoduchou indukciou overiť, že $f(n) = n^2$ pre každé prirodzené číslo n (keďže to platí pre $n = 0$ a $n = 1$). Odtiaľ už vzhľadom na to, že f je multiplikatívna, pomerne jednoducho vyplýva, že rovnosť $f(x) = x^2$ platí pre každé kladné racionálne číslo x. Skutočne, ku každému takému x existuje prirodzené n také, že číslo nx je prirodzené; ako už vieme, rovnosti $f(n) = n^2$ a $f(nx) = (nx)^2$ platia, v ich dôsledku dostávame

$$n^2x^2 = (nx)^2 = f(nx) = f(n)f(x) = n^2 f(x),$$

odkiaľ $f(x) = x^2$. Posledná rovnosť bude platiť aj pre kladné iracionálne čísla x, keď ukážeme, že funkcia f je na intervale $(0, \infty)$ neklesajúca. Všimnime si najprv, že pre každé reálne x platí $f(x) = f\bigl(\sqrt{|x|}\bigr)^2 \geqq 0$; preto má funkcia f iba nezáporné hodnoty. Ak $0 < v < u$, potom

$$f(v) = f(\sqrt{v})^2 = \bigl(f(\sqrt{v}) + 0\bigr)^2 \leqq \bigl(f(\sqrt{v}) + f(\sqrt{u - v})\bigr)^2 = f(u),$$

kde posledná rovnosť vyplýva z danej rovnice voľbou $x = t = \sqrt{v}$ a $y = z = \sqrt{u - v}$. Ukázali sme, že f je skutočne na intervale $(0, \infty)$ neklesajúca a celý dôkaz je hotový.

---

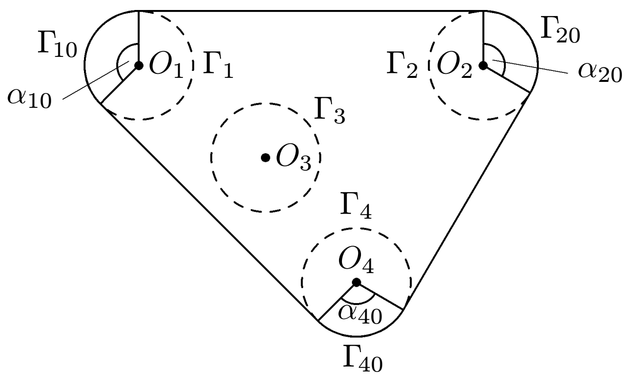
6. *V rovine sú dané kružnice* $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ *s polomerom* 1, *kde* $n \geqq 3$. *Ich stredy označme po rade* $O_1, O_2, \dots, O_n$. *Predpokladajme, že každá priamka pretína najviac dve z daných kružníc. Dokážte, že*

$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \frac{1}{|O_iO_j|} \leqq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

(*Ukrajina*)

Riešenie. Poznamenajme najprv, že žiadne dve z daných kružníc nemajú spoločný bod, lebo spoločným bodom dvoch kružníc Γ_i, Γ_j by bolo možné viesť priamku, ktorá pretína ľubovoľnú tretiu kružnicu Γ_k.

Uvažujme teraz konvexný obal rovinnej množiny, ktorá je zjednotením danej n-tice kružníc. Hranica tohto obalu sa skladá z niekoľkých úsekov spoločných vonkajších dotyčníc dvojíc daných kružníc a niekoľkých ich oblúkov (obr. 5). Príslušný oblúk kružnice Γ_i



Obr. 5

označíme Γ_{i0} a jeho veľkosť v radiánoch α_{i0}. (Ak má kružnica Γ_i s hranicou obalu spoločný najviac jeden bod, položíme $\Gamma_{i0} = \emptyset$ a $\alpha_{i0} = 0$.) Pretože skúmaná hranica je hladká uzavretá krivka, zrejme platí rovnosť

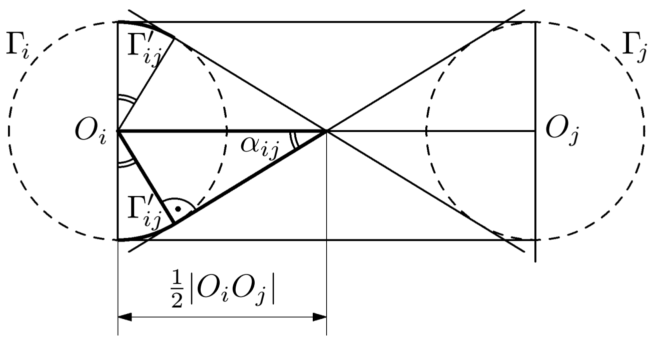
$$\alpha_{10} + \alpha_{20} + \cdots + \alpha_{n0} = 2\pi. \tag{1}$$

Ďalej budeme potrebovať nasledovnú vlastnosť každého oblúka Γ_{i0}: Ak je T ľubovoľný vnútorný bod oblúka Γ_{i0}, tak dotyčnica ku kružnici Γ_i s bodom dotyku T nemá spoločný bod so žiadnou ďalšou kružnicou Γ_j, $j \neq i$.

Vyberme teraz ľubovoľné dve dané kružnice Γ_i, Γ_j a na prvej z nich, kružnici Γ_i, uvažujme body T s touto vlastnosťou: Dotyčnica ku kružnici Γ_i s bodom dotyku T má aspoň jeden spoločný bod s kružnicou Γ_j. Všetky také body T vyplnia na kružnici Γ_i dva zhodné oblúky Γ_{ij} a Γ'_{ij}, ktorých krajné body sú body dotyku spoločných dotyčníc danej dvojice kružníc (obr. 6). Pre veľkosť α_{ij} týchto oblúkov podľa obrázka platí

$$\sin\alpha_{ij} = \frac{1}{\frac{1}{2}|O_iO_j|}, \quad \text{odkiaľ} \quad \frac{1}{|O_iO_j|} = \frac{\sin\alpha_{ij}}{2} < \frac{\alpha_{ij}}{2}, \tag{2}$$

pretože $\sin\alpha < \alpha$ pre každé $\alpha \in (0, \pi/2)$.



Obr. 6

Podľa predchádzajúceho popisu sme na každej kružnici Γ_i vyznačili $2n-1$ oblúkov – oblúk Γ_{i0} a $(n-1)$ párov oblúkov Γ_{ij} a Γ'_{ij}, kde $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$. Podľa zadania úlohy žiadne dva z týchto $(2n-1)$ oblúkov nemajú spoločný vnútorný bod, takže pre súčet ich veľkostí platí odhad

$$\alpha_{i0} + 2 \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq n,\\ j \neq i}} \alpha_{ij} \leqq 2\pi,$$

ktorý spolu s (2) vedie k nerovnosti

$$\sum_{\substack{1 \leqq j \leqq n,\\ j \neq i}} \frac{1}{|O_i O_j|} < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\,\alpha_{i0}$$

pre každé $i = 1, 2, \dots, n$. Keď sčítame týchto n nerovností, tak vzhľadom na vzťah (1) a zrejmé rovnosti $|O_i O_j| = |O_j O_i|$ dostaneme

$$2 \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \frac{1}{|O_i O_j|} < n \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i0} = \frac{(n-1)\pi}{2},$$

odkiaľ po delení dvoma vychádza žiadaná nerovnosť.

Poznámka. Dôkaz, ktorý sme uviedli, patrí vedúcemu kolumbijskej delegácie *F. Ardilovi* a je oveľa jednoduchší ako pôvodné autorské riešenie.