2003/2004
53. ročník Matematickej olympiády *Riešenia úloh IMO*

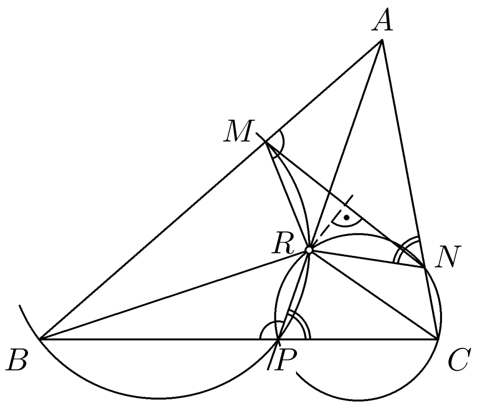
---

1. *Nech ABC je ostrouhlý trojuholník, v ktorom $|AB| \neq |AC|$. Kružnica nad priemerom BC pretína strany AB a AC postupne v bodoch M a N. Označme O stred strany BC. Osi uhlov BAC a MON sa pretínajú v bode R. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom BMR a CNR prechádzajú spoločným bodom ležiacim na strane BC.*

(*Rumunsko*)

Riešenie. (Podľa *Františka Konopeckého*.) Pretože body M, N ležia na kružnici s priemerom BC, platí $|OM| = |ON| = |OB|$. Trojuholník MNO je teda rovnoramenný a os jeho uhla MON je zároveň osou úsečky MN. Bod R, ktorý je priesečníkom osi uhla MAN s osou protiľahlej strany MN trojuholníka AMN, leží preto na kružnici opísanej trojuholníku AMN. Pritom obe osi sú totožné len vtedy, keď $|AM| = |AN|$, čo vzhľadom na predpoklad $|AB| \neq |AC|$ nie je možné, lebo z vlastností tetivového štvoruholníka $BCNM$ ľahko vyplýva, že trojuholníky AMN a ACB sú podobné (zhodujú sa v dvoch uhloch).

Z mocnosti bodu A ku kružnici s priemerom BC vyplýva, že bod A má rovnakú mocnosť aj k obom kružniciam opísaným trojuholníkom BMR a CNR (obr. 1). Ak



Obr. 1

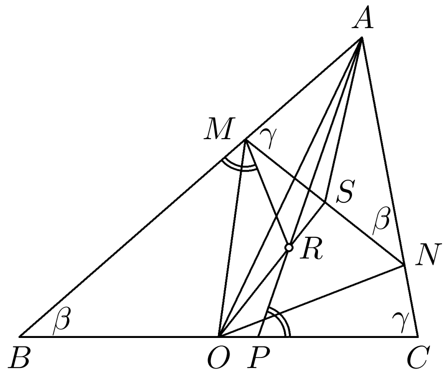
označíme P druhý spoločný bod týchto dvoch kružníc (jedným je bod R), musí bod A ležať na ich spoločnej sečnici PR (to je práve množina všetkých bodov, ktoré majú k obom kružniciam rovnakú mocnosť). Z tetivových štvoruholníkov $BPRM$ a $CPRN$ teraz spočítame, že

$$|\measuredangle BPC| = |\measuredangle BPR| + |\measuredangle CPR| = |\measuredangle AMR| + |\measuredangle ANR| = 180°,$$

lebo AMR a ANR sú protiľahlé uhly tetivového štvoruholníka $AMRN$. Uhol BPC je teda priamy, takže spoločný bod P oboch kružníc leží na strane BC.

Iné riešenie. Označme S stred úsečky MN a P priesečník osi uhla BAC so stranou BC. Pretože trojuholníky AMN a ACB sú podobné, pričom ťažnici AS

zodpovedá ťažnica AO, platí $|\measuredangle BAO| = |\measuredangle CAS|$ (obr. 2), takže os uhla BAC je zároveň



Obr. 2

aj osou uhla OAS. Preto

$$\frac{|RS|}{|RO|} = \frac{|AS|}{|AO|}.$$

Z uvedenej podobnosti ďalej vyplýva

$$\frac{|AS|}{|AO|} = \frac{|MN|}{|BC|} = \frac{|MS|}{|BO|} = \frac{|MS|}{|MO|},$$

čo spolu s predchádzajúcou rovnosťou znamená, že MR je osou vnútorného uhla OMS.

Označme vnútorné uhly trojuholníka ABC zvyčajným spôsobom. Pretože $|OM| = |OB|$, teda $|\measuredangle BMO| = \beta$, a pretože $|\measuredangle AMN| = \gamma$, veľkosť uhla OMN je α. Takže $|\measuredangle BMR| = \beta + \alpha/2 = |\measuredangle CPA|$. Dostali sme, že štvoruholník $BPRM$ je tetivový. Analogicky je tetivový aj štvoruholník $CPRN$. Teda bod $P \in BC$ je spoločným bodom oboch kružníc opísaných trojuholníkom BMR a CNR.

---

2. *Nájdite všetky mnohočleny $P(x)$ s reálnymi koeficientmi, ktoré spĺňajú rovnosť*

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

pre všetky reálne čísla a, b, c také, že $ab+bc+ca=0$. (Južná Kórea)

Riešenie. Ukážeme, že riešením sú iba mnohočleny $P(x) = sx^2 + tx^4$ pre ľubovoľné reálne s, t.

Nech $P(x)$ spĺňa podmienky zadania. Ak $a = b = 0$, tak $ab+bc+ca = 0$ pre každé reálne c. Preto dostávame

$$P(0-0) + P(0-c) + P(c-0) = 2P(0+0+c), \quad \text{čiže} \quad P(0) + P(-c) = P(c)$$

pre každé reálne c. Dosadením $c = 0$ dostaneme $P(0) = 0$, takže $P(c) = P(-c)$ pre všetky $c \in \mathbb{R}$. Teda P je párna funkcia a musí byť tvaru

$$P(x) = a_n x^{2n} + a_{n-1} x^{2n-2} + \cdots a_1 x^2, \qquad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Teraz dokážeme, že stupeň mnohočlena P môže byť najviac 4.

Pre ľubovoľné reálne čísla u a v trojica $a = uv$, $b = (1-u)v$, $c = (u^2-u)v$ spĺňa

$$ab + bc + ca = (a+b)c + ab = v(u^2-u)v + uv(1-u)v = 0.$$

Dosadením tejto trojice do rovnosti zo zadania dostaneme

$$P\left((2u-1)v\right) + P\left((1-u^2)v\right) + P\left((u^2-2u)v\right) = 2P\left((u^2-u+1)v\right)$$

pre všetky reálne u, v. Pri pevnom u môžeme ostatnú rovnosť považovať za identitu mnohočlenov v premennej v. Porovnaním vedúcich koeficientov na oboch stranách máme pre všetky $u \in \mathbb{R}$ rovnosť

$$(2u-1)^{2n} + (1-u^2)^{2n} + (u^2-2u)^{2n} = 2(u^2-u+1)^{2n}.$$

Zvolením $u = -2$ dostaneme $5^{2n} + 3^{2n} + 8^{2n} = 2 \cdot 7^{2n}$, takže $8^{2n} < 2 \cdot 7^{2n}$. Avšak už pre $n = 3$ platí $8^{2n} > 2 \cdot 7^{2n}$ ($8^{2\cdot 3} = 262\,144 > 235\,298 = 2 \cdot 7^{2\cdot 3}$), a teda tým skôr to platí aj pre $n > 3$. Takže $n \leqq 2$, z čoho $P(x) = sx^2 + tx^4$ pre nejaké reálne s a t.

Na druhej strane, každý mnohočlen uvedeného tvaru spĺňa podmienky zadania. Aby sme to overili, uvedomme si najskôr, že ľubovoľná lineárna kombinácia dvoch mnohočlenov, ktoré spĺňajú podmienky zadania, tiež spĺňa tieto podmienky. Takže stačí overiť mnohočleny x^2 a x^4. To, že vyhovuje x^2, vyplýva z identity

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 - 2(a+b+c)^2 = -6(ab+bc+ca).$$

Overme aj x^4. Nech $ab + bc + ca = 0$. Označme $p = a - b$, $q = b - c$ a $r = c - a$. Pri overení x^2 sme vlastne ukázali, že $p^2+q^2+r^2 = 2(a+b+c)^2$. Potom, keďže $p+q+r = 0$, želanú rovnosť dostaneme nasledovne:

$$\begin{aligned}
pq + qr + rp &= -\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+r^2) = -(a+b+c)^2,\\
(pq)^2 + (qr)^2 + (rp)^2 &= (pq+qr+rp)^2 - 2pqr(p+q+r) = (a+b+c)^4,\\
p^4 + q^4 + r^4 &= (p^2+q^2+r^2)^2 - 2\left((pq)^2 + (qr)^2 + (rp)^2\right) = 2(a+b+c)^4.
\end{aligned}$$

Iné riešenie. Pre každé $z \in \mathbb{R}$ trojica $(a, b, c) = (6z, 3z, -2z)$ spĺňa podmienku $ab + bc + ca = 0$. Dosadením do zadanej rovnosti dostávame

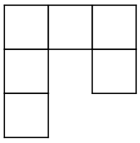
$$P(3z) + P(5z) + P(-8z) = 2P(7z).$$

Takže ak $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, platí nutne pre každé $i = 0, 1, 2, \ldots$ rovnosť

$$\left(3^i + 5^i + (-8)^i - 2 \cdot 7^i\right) a_i = 0.$$

Výraz v zátvorkách je záporný pre nepárne i a kladný pre $i = 0$ a pre všetky párne $i \geqq 6$. Iba pre $i = 2$ a $i = 4$ je výraz nulový. Preto $P(x) = sx^2 + tx^4$ pre nejaké $s, t \in \mathbb{R}$. Ostáva len overiť, že všetky mnohočleny tohto tvaru vyhovujú, čo urobíme rovnako ako v prvom riešení.

3. *Nazvime hák útvar vytvorený zo šiestich jednotkových štvorčekov ako na obr. 3 alebo*

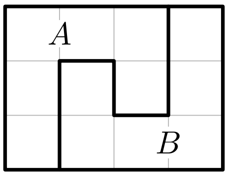


Obr. 3

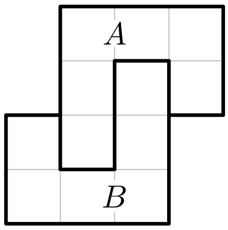
ľubovoľný útvar, ktorý vznikne jeho otočením či súmernosťou. Určte všetky pravouholníky $m \times n$, ktoré sa dajú hákmi pokryť tak, že

- *pravouholník je pokrytý bez medzier a prekrytí;*
- *žiadna časť háku nepokrýva plochu mimo pravouholníka.* (*Estónsko*)

Riešenie. Predpokladajme, že pravouholník $m \times n$ je pokrytý hákmi tak, ako sa spomína v zadaní. Pre každý hák A máme jediný hák B, ktorý pokrýva *vnútorný* štvorček háku A jedným zo svojich *koncových* štvorčekov. Pritom vnútorný štvorček háku B je nutne pokrytý koncovým štvorčekom háku A. Takže v pokrytí sú všetky háky popárované do dvojíc. Sú len dve možnosti, ako umiestniť B ku A, aby nevznikli



Obr. 4



Obr. 5

medzery a prekrytia. V jednom prípade tvoria A a B obdĺžnik 4×3 (obr. 4), v druhom prípade osemuholníkový útvar (obr. 5). Pravouholník $m \times n$ teda vieme pokryť hákmi práve vtedy, keď ho vieme pokryť týmito *dvojútvarmi* zloženými z 12 štvorčekov. Preto mn musí byť nutne deliteľné dvanástimi. Ukážeme, že niektorý z rozmerov m a n musí byť deliteľný štyrmi.

Predpokladajme, že to neplatí. Potom m aj n sú párne, nakoľko $4 \mid mn$. Rozdeľme pravouholník na jednotkové štvorčeky a do istých štvorčekov vpíšme čísla 1 alebo 2 ako na obr. 6 (jednotky sú vpísané v každom štvrtom riadku a v každom štvrtom stĺpci, dvojky sú na priesečníkoch „ojednotkovaných“ riadkov a stĺpcov). Keďže počet štvorče-

			1				1		
			1				1		
1	1	1	2	1	1	1	2	1	1
			1				1		
			1				1		
			1				1		
1	1	1	2	1	1	1	2	1	1
			1				1		
			1				1		
			1				1		

Obr. 6

kov v každom riadku aj stĺpci je párny, súčet všetkých čísel vpísaných do pravouholníka je párny. Ľahko možno overiť, že každý obdĺžnik 4×3 vždy pokryje čísla, ktorých súčet je 3 alebo 7. Útvar z obr. 5 zasa vždy pokryje čísla, ktorých súčet je 5 alebo 7. Teda počet všetkých dvojútvarov musí byť párny (súčet nepárneho počtu nepárnych čísel by bol nepárny). Potom ale $24 \mid mn$, čiže mn je deliteľné aj ôsmimi, čo je v spore s predpokladom, že m ani n nie je deliteľné štyrmi.

Uvedomme si ešte, že žiadny z rozmerov m, n sa nemôže rovnať 1, 2 ani 5 (nech ukladáme háky akokoľvek, nevieme nimi pokryť riadok či stĺpec pozdĺž strany pravouholníka dĺžky 1, 2 či 5). Zdôvodnili sme teda, že ak je pokrytie možné, tak aspoň jeden rozmer je deliteľný tromi, aspoň jeden štyrmi a $m, n \notin \{1, 2, 5\}$.

Naopak, ak sú tieto podmienky splnené, potom sa pravouholník hákmi pokryť dá (iba použitím obdĺžnikov 4×3). Totiž ak jeden rozmer je deliteľný tromi a druhý štyrmi, je existencia pokrytia zrejmá. A ak je jeden z rozmerov, povedzme m, deliteľný dvanástimi a $n \notin \{1, 2, 5\}$, potom n vieme rozložiť na súčet niekoľkých trojok a niekoľkých štvoriek. Celý pravouholník preto môžeme rozdeliť na pásy $m \times 3$ a $m \times 4$. Pritom každý z takých pásov zrejme pokryť vieme.

---

4. *Nech $n \geqq 3$ je celé číslo. Nech $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sú kladné reálne čísla také, že*

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n} \right).$$

Ukážte, že t_i, t_j, t_k sú dĺžky strán trojuholníka pre všetky i, j, k, kde $1 \leqq i < j < k \leqq n$.
(Južná Kórea)

Riešenie. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

1° Aby sme tvrdenie dokázali pre $n = 3$, potrebujeme ukázať, že každé tri kladné reálne čísla t_1, t_2, t_3 spĺňajúce nerovnosť

$$10 > (t_1 + t_2 + t_3) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right) \tag{1}$$

spĺňajú aj trojuholníkové nerovnosti. Predpokladajme sporom, že to neplatí. Bez ujmy na všeobecnosti (vďaka symetrickosti nerovnosti (1)) môžeme predpokladať, že $t_1 \geqq t_2 + t_3$. Označme V výraz na ľavej strane (1). Úpravou dostávame

$$V = (t_1 + t_2 + t_3)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) = 3 + \frac{t_1}{t_2} + \frac{t_1}{t_3} + \frac{t_2}{t_1} + \frac{t_3}{t_1} + \underbrace{\frac{t_2}{t_3} + \frac{t_3}{t_2}}_{\geqq 2} \geqq$$
$$\geqq 5 + t_1\left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) + \frac{t_2 + t_3}{t_1} \geqq 5 + 2\frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} + 2\frac{\sqrt{t_2 t_3}}{t_1}. \tag{2}$$

Pri ostatnom odhade sme použili nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom čísel $1/t_2$ a $1/t_3$, resp. čísel t_2 a t_3. Keď rovnakú nerovnosť použijeme na predpoklad $t_1 \geqq t_2 + t_3$, dostaneme $t_1 \geqq 2\sqrt{t_2 t_3}$. Označme pre zjednodušenie úprav $t_1/\sqrt{t_2 t_3} = a$. Máme teda $a \geqq 2$. Pokračovaním v úpravách (2) získame

$$V \geqq 5 + 2a + \frac{2}{a} = 10 + \frac{2a^2 - 5a + 2}{a} = 10 + \frac{(2a-1)(a-2)}{a} \geqq 10 \tag{3}$$

(využili sme odvodenú nerovnosť $a \geqq 2$). Spojením (1), (2) a (3) dostávame zjavný spor $10 > V \geqq 10$.

2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre hodnotu $n-1 \geqq 3$. Tvrdenie dokazujme opäť sporom. Nech teda kladné reálne čísla $t_1, t_2, \ldots, t_n$ spĺňajú

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right) \tag{4}$$

a niektoré tri z nich nespĺňajú trojuholníkové nerovnosti. Vďaka symetrickosti nerovnosti (4) môžeme opäť bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $t_1 \geqq t_2 + t_3$. Výraz na pravej strane (4) označme W. Úpravami dostávame

$$\begin{aligned}
W &= (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right) = \\
&= (t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1})\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_{n-1}}\right) + \\
&+ t_n\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_{n-1}}\right) + \frac{1}{t_n}(t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1}) + 1 \geqq \\
&\geqq (n-1)^2 + 1 + \underbrace{\left(\frac{t_n}{t_1} + \frac{t_1}{t_n}\right)}_{\geqq 2} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{t_n}{t_{n-1}} + \frac{t_{n-1}}{t_n}\right)}_{\geqq 2} + 1 \geqq \\
&\geqq (n-1)^2 + 1 + 2(n-1) + 1 = n^2 + 1.
\end{aligned} \tag{5}$$

Všimnime si, ako sme využili indukčný predpoklad. Keďže $t_1 \geqq t_2 + t_3$, nemôže platiť

$$(n-1)^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1})\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_{n-1}}\right)$$

(bolo by to v spore s tým, že tvrdenie platí pre kladné reálne čísla $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$), platí teda opačná nerovnosť, ktorú sme pri úpravách (5) použili. Spojením (4) a (5) máme $n^2 + 1 > W \geqq n^2 + 1$, čo je spor.

Poznámka. Riešenie je zaujímavé tým, že druhý krok indukcie je oveľa jednoduchší ako prvý krok. Pri matematickej indukcii to zvyčajne býva naopak.

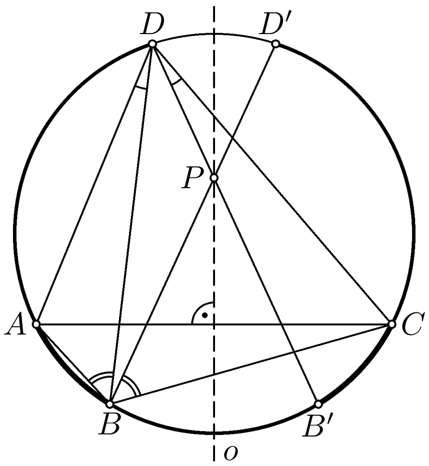
---

5. *V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ uhlopriečka BD nerozpoľuje ani jeden z uhlov ABC, CDA. Bod P leží vnútri $ABCD$ a spĺňa rovnosti*

$$|\measuredangle PBC| = |\measuredangle DBA| \quad \text{a} \quad |\measuredangle PDC| = |\measuredangle BDA|.$$

Dokážte, že $ABCD$ je tetivový práve vtedy, keď $|AP| = |CP|$. (*Poľsko*)

Riešenie. (Podľa *Františka Konopeckého.*) Vzhľadom na to, že uhlopriečka BD nie je



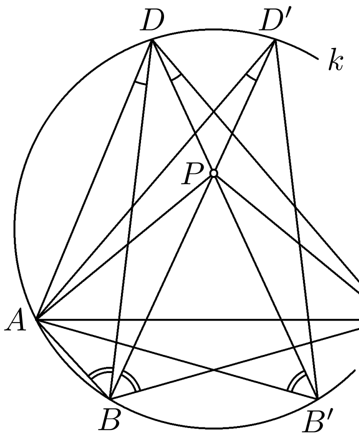
Obr. 7

osou ani jedného z vnútorných uhlov uvažovaného štvoruholníka $ABCD$ (pri vrcholoch B a D) a bod P leží vnútri $ABCD$, nemôže ležať na uhlopriečke BD.

Predpokladajme najskôr, že $ABCD$ je tetivový. Označme B' a D' priesečníky jemu opísanej kružnice s polpriamkami opačnými k PD, resp. k PB. Rovnosť uhlov ABD a PBC (obr. 7) tak znamená rovnosť príslušných oblúkov AD a CD'. Podobne sa zhodujú aj oblúky AB a CB'. To ale znamená, že bod B' je obrazom bodu B a bod D' obrazom bodu D v osovej súmernosti podľa osi o úsečky AC. V tejto osovej súmernosti je tak úsečka BD' obrazom úsečky $B'D$ a ich priesečník P preto leží na osi uhlopriečky AC. Teda $|AP| = |CP|$.

Obrátene, nech $|AP| = |CP|$. Uvažujme kružnicu k opísanú trojuholníku ABD

a označme B' a D' jej priesečníky s polpriamkami opačnými k PD, resp. k PB (obr. 8).



Obr. 8

Z mocnosti bodu P ku kružnici k vyplýva

$$\frac{|PB|}{|PD|} = \frac{|PB'|}{|PD'|},$$

takže trojuholníky BPD a $B'PD'$ sú podobné. To ale naviac znamená, že trojuholníky BDC a $B'D'A$ sa zhodujú v dvojiciach uhlov pri stranách BD a $B'D'$, takže sú podobné s rovnakým koeficientom podobnosti ako trojuholníky BPD a $B'PD'$. A pretože v tejto podobnosti si zodpovedajú dve zhodné úsečky CP a AP, jedná sa o zhodnosť (ľahko nahliadneme, že sa jedná o osovú súmernosť). Táto zhodnosť zobrazí kružnicu k opísanú trojuholníku ABD na seba, proti bod C, ktorý je obrazom bodu A, leží tiež na tejto kružnici a štvoruholník $ABCD$ je teda tetivový.

---

6. *Prirodzené číslo nazveme striedavé, ak každé dve susedné číslice v jeho desiatkovom zápise majú rôznu paritu. Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že n má striedavý násobok.* (Irán)

Riešenie. Striedavých čísel vieme vytvoriť veľa, no vo všeobecnosti ich ťažko možno popísať v tvare, z ktorého by bolo vidieť, čím sú deliteľné. Zamerajme sa preto na nejakú úzku skupinu striedavých čísel, o ktorých vieme povedať viac. Najjednoduchšie striedavé čísla vytvoríme z jednotiek a núl. Zistime, či už medzi takýmito číslami nenájdeme násobky nejakej väčšej skupiny čísel. Presnejšie povedané, snažme sa pre číslo n vytvoriť striedavé číslo tvaru $1010\ldots101$ (nazývajme ďalej takéto číslo *superstriedavé* a označujme ho s_k, kde k je počet jednotiek v jeho zápise), ktoré by bolo násobkom n. Medzi superstriedavými číslami nájdeme vďaka Dirichletovmu princípu určite dve rôzne, ktoré dávajú po delení číslom n rovnaký zvyšok. Teda ich rozdiel je násobkom n. Na druhej strane, rozdiel dvoch superstriedavých čísel s_k a s_ℓ pre $k > \ell$ je zrejme tvaru

$$\underbrace{1010\ldots101}_{k\text{ jednotiek}} - \underbrace{1010\ldots101}_{\ell\text{ jednotiek}} = \underbrace{1010\ldots101}_{k-\ell\text{ jednotiek}}\underbrace{00\ldots00}_{2\ell\text{ núl}} = s_{k-\ell}\cdot 10^{2\ell}.$$

Takže pre každé n vieme nájsť k a ℓ také, že $n \mid s_{k-\ell}\cdot 10^{2\ell}$. Ak n je nesúdeliteľné s číslom 10, tak dokonca $n \mid s_{k-\ell}$, teda n má striedavý násobok.

Vidíme, že problém je s číslami n, ktoré sú párne, resp. deliteľné piatimi. Zrejme žiadny ich násobok nie je superstriedavý. Striedavé násobky k nim teda musíme hľadať v inom tvare. Skúsme ich nájsť najskôr pre čísla n, ktoré sú mocninou čísla 5, t. j. pre čísla $n = 5^\alpha$. Pre malé hodnoty α sa nám to naozaj darí, keďže

$$5, \quad 25 = 5^2, \quad 125 = 5^3, \quad 8\,125 = 13 \cdot 5^4, \quad 78\,125 = 25 \cdot 5^5 \tag{1}$$

sú striedavé. Pre väčšie α môžeme striedavý násobok čísla 5^α vytvoriť indukciou. Totiž keď máme vytvorený striedavý násobok A_k čísla 5^k, ktorý má k číslic (pripúšťame, aby sa desiatkový zápis začínal nulou), môžeme vytvoriť striedavý násobok čísla 5^{k+1} tak, že pred A_k napíšeme vhodne jednu číslicu. Prvý krok indukcie je v (1). Pre druhý krok predpokladajme, že už máme vytvorené striedavé číslo

$$A_k = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1} = 5^k \cdot d, \qquad d \in \mathbb{N}, \quad a_1, a_2, \dots a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}.$$

Potom predpísaním nejakej číslice a_{k+1} pred A_k dostaneme

$$A_{k+1} = \overline{a_{k+1} A_k} = a_{k+1} \cdot 10^k + A_k = 10^k a_{k+1} + 5^k d = 5^k(2^k a_{k+1} + d).$$

Aby A_{k+1} bolo striedavé a súčasne násobkom 5^{k+1}, stačí a_{k+1} zvoliť tak, aby malo opačnú paritu ako a_k a aby $2^k a_{k+1} + d$ bolo deliteľné piatimi. To zrejme vždy ide, nakoľko prvú podmienku spĺňa 5 rôznych číslic (buď číslice z $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, alebo z $\{0, 2, 4, 6, 8\}$) a pre každú z nich dáva číslica a_{k+1}, a teda aj číslo $2^k a_{k+1} + d$ iný zvyšok po delení piatimi (keďže 2^k a 5 sú nesúdeliteľné). Jeden z tých zvyškov teda musí byť nulový a vtedy $5 \mid 2^k a_{k+1} + d$. Ukázali sme teda, že všetky mocniny piatich majú striedavé násobky. Pritom z uvedeného postupu vyplýva, že pre dané $n = 5^\alpha$ vieme striedavý násobok vytvoriť tak, aby mal párny počet číslic a končil sa nepárnou číslicou.

Venujme sa teraz mocninám čísla dva. Opäť ukážeme, že pre každé $n = 2^\beta$ existuje striedavý násobok n. Postup bude podobný, ako pri mocninách piatich, avšak pridávať budeme až dve číslice a na vytvorené čísla budeme mať prísnejšie predpoklady. Presnejšie, dokážeme, že pre každé prirodzené k existuje $(2k-1)$-ciferné striedavé číslo B_k, ktoré je deliteľné číslom 2^{2k-1} ale nie je deliteľné číslom 2^{2k}. Prvý krok indukcie nám zabezpečia striedavé čísla

$$B_1 = 2, \quad B_2 = 232 = 2^3 \cdot 29, \quad B_3 = 27\,232 = 2^5 \cdot 851, \quad B_4 = 2\,127\,232 = 2^7 \cdot 16\,619.$$

V druhom kroku predpokladajme, že máme striedavé číslo

$$B_k = \overline{b_{2k-1} b_{2k-2} \dots b_1} = 2^{2k-1} \cdot d, \qquad d \in \mathbb{N},\ 2 \nmid d, \quad b_1, \dots b_{2k-1} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

(zo striedavosti a párnosti B_k nutne číslica b_{2k-1} je párna). Chceme zvoliť číslo $b = \overline{b_{2k+1} b_{2k}}$, (pričom $b_{2k} \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ a $b_{2k+1} \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$) tak, aby číslo

$$B_{k+1} = \overline{b B_k} = b \cdot 10^{2k-1} + B_k = 10^{2k-1} b + 2^{2k-1} d = 2^{2k-1}(5^{2k-1} b + d)$$

bolo deliteľné číslom 2^{2k+1}, ale nebolo deliteľné číslom 2^{2k+2}. Potrebujeme teda, aby $5^{2k-1} b + d$ bolo deliteľné štyrmi, ale nebolo deliteľné ôsmimi. Avšak podľa predpokladu d je nepárne, teda dáva po delení ôsmimi jeden zo zvyškov 1, 3, 5 alebo 7. Za b teda stačí zvoliť jedno z čísel 21, 23, 25 alebo 27 tak, aby $5^{2k-1}b$ dávalo po delení ôsmimi taký zvyšok, že keď ho sčítame s d, výsledok bude dávať po delení ôsmimi zvyšok 4 (t. j. ak d dáva zvyšok 1, $5^{2k-1}b$ chceme so zvyškom 3, k zvyšku 3 chceme zvyšok 1, k zvyšku 5 zvyšok 7 a k zvyšku 7 zvyšok 5). Keďže 5^{2k-1} je nesúdeliteľné s 8 a čísla 21, 23, 25 a 27 dávajú rôzne nepárne zvyšky po delení ôsmimi, pre jednu hodnotu $b \in \{21, 23, 25, 27\}$ bude zvyšok $5^{2k-1}b$ po delení ôsmimi naozaj taký, ako chceme. Aj pre mocniny dvoch sme teda našli striedavé násobky. Pritom ak pred B_k pripíšeme ľubovoľnú nepárnu číslicu, dostaneme striedavé číslo, ktoré je tiež násobkom 2^{2k-1}, pretože B_k má $2k-1$ číslic. Takže ku každému $n = 2^\beta$ vieme nájsť striedavé číslo, ktoré má párne veľa číslic.

Takto vyzbrojení môžeme prejsť ku všeobecnému prípadu, keď $n = 5^\alpha \cdot 2^\beta \cdot m$, pričom m nie je deliteľné dvoma ani piatimi. Pre $\alpha = \beta = 0$ sme už úlohu vyriešili (číslo n má v takom prípade superstriedavý násobok).

Uvažujme ďalej prípad, keď $\beta = 0$. Číslo 5^α má striedavý násobok s párnym počtom číslic, označme ho M. Zrejme potom aj číslo $S_k = \overline{MM\ldots M}$ (k-krát napíšeme za sebou číslo M) je striedavým násobkom 5^α. Rovnakou úvahou ako pri superstriedavých číslach nájdeme k a ℓ také, že $m \mid S_{k-\ell}$. Potom $S_{k-\ell}$ je striedavým násobkom n.

Úplne rovnako nájdeme striedavý násobok n v prípade, keď $\alpha = 0$.

Keď $\beta = 1$ a $\alpha \geqq 1$, stačí k číslu $S_{k-\ell}$, ktoré sme našli pre $n = 5^\alpha \cdot m$, pripísať sprava nulu. Dostaneme číslo, ktoré bude striedavé (keďže M a teda aj $S_{k-\ell}$ končili nepárnou číslicou) a bude násobkom dvoch aj násobkom $5^\alpha \cdot m$, t. j. bude násobkom $5^\alpha \cdot 2^1 \cdot m$.

Ostal prípad, keď $\beta \geqq 2$ a $\alpha \geqq 1$. V takom prípade je ale $n = 5^\alpha \cdot 2^\beta \cdot m$ násobkom čísla 20, teda ľubovoľný jeho násobok je tiež násobkom 20, čiže končí jedným z dvojčíslí 00, 20, 40, 60, 80. Také číslo zrejme nie je nikdy striedavé.

Odpoveď. Hľadanými číslami sú všetky čísla, ktoré nie sú násobkom čísla 20.