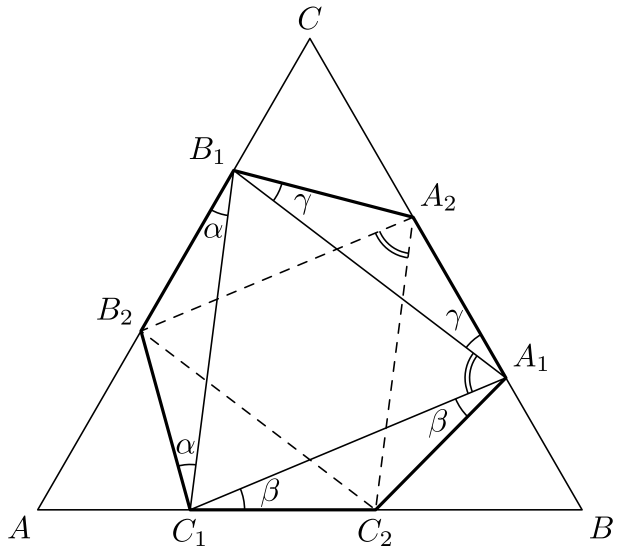
2004/2005
54. ročník Matematickej olympiády *Riešenia úloh IMO*

1. *Na stranách rovnostranného trojuholníka ABC je zvolených šesť bodov: body A_1, A_2 na strane BC, body B_1, B_2 na strane CA a body C_1, C_2 na strane AB. Tieto body sú vrcholmi konvexného šesťuholníka $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ s rovnako dlhými stranami. Dokážte, že priamky A_1B_2, B_1C_2 a C_1A_2 sa pretínajú v jednom bode.* (Rumunsko)

Riešenie. (Podľa *Jakuba Závodného.*) Označme vnútorné uhly pri základniach rovnoramenných trojuholníkov $C_1B_1B_2$, $A_1C_1C_2$, $B_1A_1A_2$ postupne α, β, γ (obr. 1). Dopočítaním uhlov do $180°$ postupne pri bode C_2, v trojuholníku C_2BA_1 a v rov-



Obr. 1

noramennom trojuholníku $A_2C_2A_1$ dostaneme

$$|\measuredangle BC_2A_1| = 2\beta, \qquad |\measuredangle C_2A_1B| = 120° - 2\beta, \qquad |\measuredangle C_2A_2A_1| = 60° - \beta.$$

Podobne

$$|\measuredangle CA_2B_1| = 2\gamma, \qquad |\measuredangle A_2B_1C| = 120° - 2\gamma, \qquad |\measuredangle B_1A_2B_2| = 60° - \gamma.$$

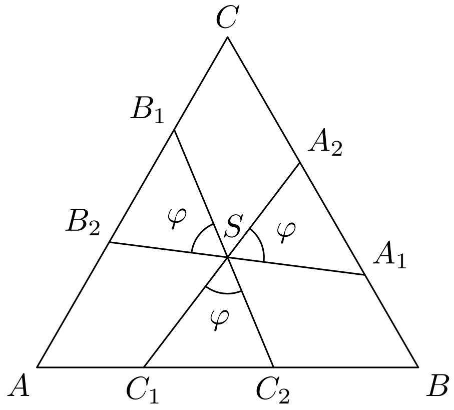
Preto

$$\begin{aligned} |\measuredangle B_1A_1C_1| &= 180° - (120° - 2\beta) - \beta - \gamma = 60° + \beta - \gamma, \\ |\measuredangle B_2A_2C_2| &= 180° - 2\gamma - (60° - \gamma) - (60° - \beta) = 60° + \beta - \gamma, \end{aligned}$$

čiže $|\measuredangle B_1A_1C_1| = |\measuredangle B_2A_2C_2|$. Zrejme rovnakým spôsobom možno odvodiť aj rovnosti

$$|\measuredangle C_1B_1A_1| = |\measuredangle C_2B_2A_2| \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle A_1C_1B_1| = |\measuredangle A_2C_2B_2|.$$

Trojuholníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ sú teda podobné. Uvažujme (jednoznačne určené) podobné zobrazenie, ktoré zobrazí prvý z týchto trojuholníkov na druhý. Možno ho dostať zložením otočenia okolo stredu S o uhol φ a rovnoľahlosti s tým istým stredom S a koeficientom k (používame známe tvrdenie, že taký rozklad na dve zobrazenia s rovnakým stredom existuje). Trojuholníky SA_1A_2, SB_1B_2, SC_1C_2 sú navzájom podobné,

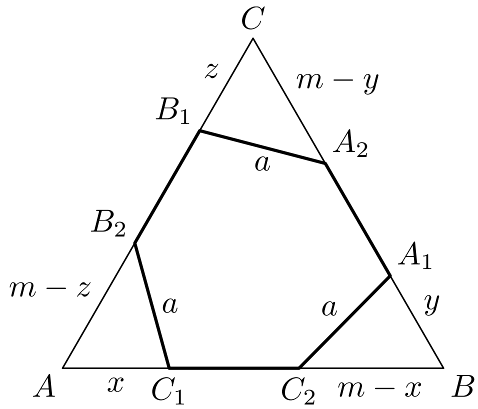


Obr. 2

pretože pri vrchole S majú rovnaký uhol (obr. 2) a navyše $|SA_2| : |SA_1| = |SB_2| : |SB_1| = |SC_2| : |SC_1| = k$. Podľa zadania však $|A_1A_2| = |B_1B_2| = |C_1C_2|$, uvedené trojuholníky sú tak zhodné a majú zhodné výšky z vrcholu S. Z toho vyplýva, že S má rovnakú vzdialenosť od všetkých strán trojuholníka ABC a je to nutne stred vpísanej kružnice (stredy pripísaných kružníc ľahko vylúčime). No z odvodenej zhodnosti máme aj $|SA_1| = |SB_1| = |SC_1|$ a keďže trojuholník ABC je rovnostranný (so stredom S), je kvôli symetrii rovnostranný aj trojuholník $A_1B_1C_1$.

Teraz už ľahko dokážeme zadané tvrdenie. Štvoruholník $C_1A_1B_1B_2$ je deltoid ($|C_1A_1| = |A_1B_1|$ a $|B_1B_2| = |B_2C_1|$), takže jeho uhlopriečka A_1B_2 je zároveň osou úsečky B_1C_1. Podobne je B_1C_2 osou úsečky C_1A_1 a C_1A_2 osou úsečky A_1B_1. Vidíme, že zadané tri priamky sú osami strán trojuholníka $A_1B_1C_1$, pretínajú sa teda v jednom bode.

Iné riešenie. (Podľa *Ondreja Budáča.*) Označme a dĺžku strany šesťuholníka



Obr. 3

$A_1A_2B_1B_2C_1C_2$. Položme $|AB| - a = m$. Ďalej nech $|AC_1| = x$, $|BA_1| = y$, $|CB_1| = z$. Potom $|BC_2| = m - x$, $|CA_2| = m - y$, $|AB_2| = m - z$ (obr. 3). Použitím kosínusovej vety v trojuholníkoch AC_1B_2 a BA_1C_2 (keďže $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$) dostaneme

$$a^2 = x^2 + (m - z)^2 - x(m - z) = y^2 + (m - x)^2 - y(m - x).$$

Po roznásobení zátvoriek a úprave získame

$$m(-2z + x + y) = (y - z)(y + z + x).$$

Zrejme analogicky vieme dostať (použitím kosínusovej vety pre trojuholníky AC_1B_2 a CB_1A_2) rovnosť

$$(x - y)(x + y + z) = m(-2y + z + x).$$

Po vynásobení uvedených dvoch rovností, vykrátení nenulových činiteľov m a $(x + y + z)$, roznásobení a následnými úpravami obdržíme

$$\begin{aligned} (x - y)(-2z + x + y) &= (y - z)(-2y + z + x), \\ x^2 - y^2 - 2zx + 2yz &= -2y^2 - z^2 + xy + 3yz - zx, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= xy + yz + zx, \\ \tfrac{1}{2}\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right] &= 0. \end{aligned}$$

Na ľavej strane ostatnej rovnosti máme súčet nezáporných výrazov, ktorý je nulový len v prípade, že všetky tri sčítance sú nulové. Nutne teda $x = y = z$, čiže trojuholník $A_1B_1C_1$ je rovnostranný (kvôli symetrii). Zadané tvrdenie už teraz dokážeme rovnakým spôsobom, ako v závere prvého riešenia.

---

2. *Nech $a_1, a_2, \dots$ je postupnosť celých čísel s nekonečným počtom kladných členov a s nekonečným počtom záporných členov. Predpokladajme, že pre každé prirodzené číslo n čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ po delení číslom n dávajú n rôznych zvyškov. Dokážte, že každé celé číslo sa v postupnosti vyskytuje práve raz.* (*Holandsko*)

Riešenie. Zrejme žiadne číslo sa v postupnosti nevyskytuje viac ako raz, ak by totiž pre $i < j$ bolo $a_i = a_j$, pre každé $n \geqq j$ by medzi číslami $a_1, a_2, \dots, a_n$ boli aj a_i, a_j a dávali by ten istý zvyšok po delení n. Navyše pre každé prirodzené číslo n je rozdiel ľubovoľných dvoch čísel spomedzi $a_1, a_2, \dots, a_n$ nanajvýš $n-1$, lebo v opačnom prípade by sme mali indexy $i < j \leqq n$ také, že $m = |a_i - a_j| \geqq n$ a medzi číslami $a_1, a_2, \dots, a_m$ by boli dve s rovnakým zvyškom po delení m.

Uvažujme množinu $\mathsf{M} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ pre ľubovoľné prirodzené n. Ak c je najmenšie a d najväčšie číslo z M, tak z uvedeného vyplýva, že $d - c \geqq n - 1$ (keďže všetky prvky M sú rôzne) a zároveň $d - c \leqq n - 1$ (keďže $c, d \in \mathsf{M}$). Nutne teda $d - c = n - 1$ a množina M pozostáva zo všetkých celých čísel nachádzajúcich sa medzi c a d.

Nech x je ľubovoľné celé číslo. Keďže zadaná postupnosť má nekonečne veľa kladných aj záporných členov a všetky jej členy sú rôzne, existuje index i taký, že $a_i < x$ a zároveň index j taký, že $x < a_j$. Pre $n = \max\{i, j\}$ sú medzi číslami $a_1, a_2, \dots, a_n$ okrem iných všetky celé čísla medzi a_i a a_j, teda aj x.

---

3. *Nech x, y a z sú kladné reálne čísla také, že $xyz \geqq 1$. Dokážte, že*

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqq 0.$$

(*Južná Kórea*)

Riešenie. (Podľa *Iurieho Boreica.*) Keďže

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{x^2(y^2+z^2)(x^3-1)^2}{x^3(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)}\geqq 0$$

(a podobná nerovnosť platí pre zlomky, ktoré dostaneme cyklickou zámenou premenných), stačí namiesto zadanej nerovnosti dokázať nerovnosť

$$\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}+\frac{y^5-y^2}{y^3(x^2+y^2+z^2)}+\frac{z^5-z^2}{z^3(x^2+y^2+z^2)}\geqq 0, \tag{1}$$

ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(x^2-\frac{1}{x}+y^2-\frac{1}{y}+z^2-\frac{1}{z}\right)\geqq 0.$$

Z podmienky $xyz\geqq 1$ máme $1/x\leqq yz$, $1/y\leqq zx$, $1/z\leqq xy$, pre výraz v zátvorke preto platí

$$\begin{aligned}x^2-\frac{1}{x}+y^2-\frac{1}{y}+z^2-\frac{1}{z}&\geqq x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\\&=\tfrac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\geqq 0.\end{aligned}$$

Tým je nerovnosť (1) dokázaná.

Iné riešenie. Prvý zlomok na ľavej strane vieme upraviť na tvar

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}=\frac{x^5+y^2+z^2-(x^2+y^2+z^2)}{x^5+y^2+z^2}=1-\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}$$

a podobne možno prepísať aj zvyšné zlomky. Zadaná nerovnosť je preto ekvivalentná s nerovnosťou

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\leqq 3.$$

Použitím Cauchy-Schwarzovej nerovnosti a podmienky $xyz\geqq 1$ dostaneme

$$(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2)\geqq\left(x^{5/2}(yz)^{1/2}+y^2+z^2\right)^2\geqq(x^2+y^2+z^2)^2,$$

čiže

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\leqq\frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Analogické nerovnosti platia aj pre ďalšie dva zlomky, preto

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\leqq 2+\frac{yz+zx+xy}{x^2+y^2+z^2}\leqq 3,$$

čo sme chceli dokázať. Využili sme (podobne ako v závere prvého riešenia) známy fakt, že $x^2+y^2+z^2\geqq yz+zx+xy$.

4. *Uvažujme postupnosť $a_1, a_2, \dots$ definovanú vzťahom*

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Určte všetky kladné celé čísla, ktoré sú nesúdeliteľné s každým členom postupnosti.

(*Poľsko*)

Riešenie. Ukážeme, že každé prvočíslo p má v danej postupnosti svoj násobok. Keďže $a_2 = 48$ je násobkom dvoch aj troch, stačí uvažovať $p > 3$. V takom prípade z malej Fermatovej vety máme (všetky kongruencie uvažujeme modulo p) $2^{p-1} \equiv 1$, $3^{p-1} \equiv 1$, a teda aj $6^{p-1} \equiv 1$. Odtiaľ

$$6a_{p-2} = 6 \cdot 2^{p-2} + 6 \cdot 3^{p-2} + 6 \cdot 6^{p-2} - 6 = 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 = 0,$$

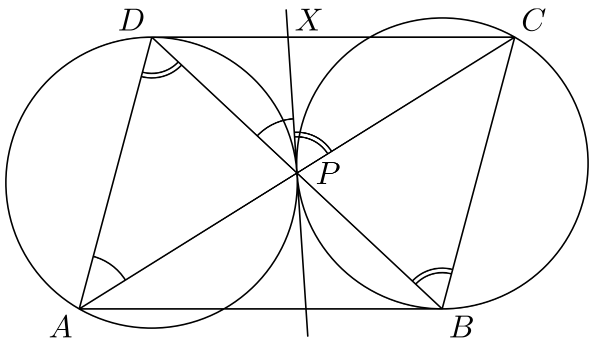
čiže $6a_{p-2}$ je násobkom p a keďže $p > 3$, nutne $p \mid a_{p-2}$.

Jediné kladné číslo, ktoré je nesúdeliteľné so všetkými členmi danej postupnosti, je 1.

5. *Nech $ABCD$ je daný konvexný štvoruholník s rovnako dlhými stranami BC a AD, ktoré nie sú rovnobežné. Nech body E a F ležia postupne vnútri strán BC a AD tak, že $|BE| = |DF|$. Priamky AC a BD sa pretínajú v bode P, priamky BD a EF v bode Q, priamky EF a AC v bode R. Uvažujme všetky trojuholníky PQR určené meniacou sa polohou bodov E a F. Ukážte, že kružnice opísané týmto trojuholníkom majú spoločný bod rôzny od P.*

(*Poľsko*)

Riešenie. (Podľa *Františka Simančíka.*) Uvažujme kružnice opísané trojuholníkom BCP a ADP. Predpokladajme, že sa v bode P dotýkajú a že ich spoločná dotyčnica



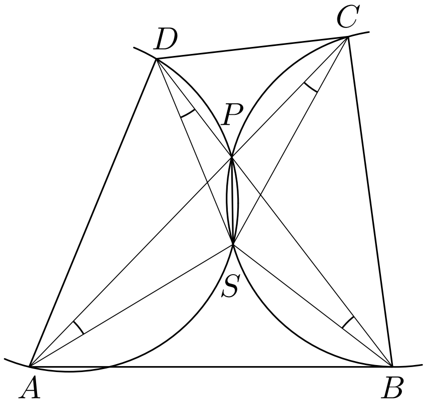
Obr. 4

vedená týmto bodom pretína stranu CD v bode X (obr. 4). Z rovnosti obvodového a úsekového uhla pri tetivách DP a CP dostávame $|\measuredangle DAP| = |\measuredangle DPX|$ a $|\measuredangle CBP| = |\measuredangle CPX|$. Navyše

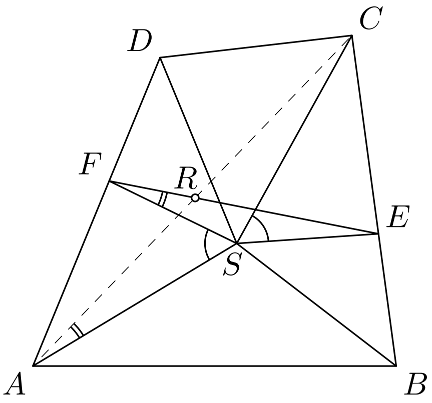
$$|\measuredangle CPX| = 180^\circ - |\measuredangle APD| - |\measuredangle DPX| = |\measuredangle DAP| + |\measuredangle PDA| - |\measuredangle DPX| = |\measuredangle PDA|.$$

Teda $|\measuredangle CBP| = |\measuredangle PDA|$ a strany BC a AD sú rovnobežné (rovnajú sa príslušné striedavé uhly), čo je v rozpore so zadaním úlohy. Uvažované kružnice sa preto nedotýkajú a pretínajú sa okrem bodu P ešte v bode, ktorý označíme S. Keďže $|BC| = |AD|$

a $|\measuredangle BPC| = |\measuredangle APD|$, tak tieto kružnice majú rovnaké polomery a všetky obvodové uhly prislúchajúce spoločnej tetive PS majú rovnakú veľkosť (obr. 5). Z toho vyplýva,



Obr. 5



Obr. 6

že trojuholníky CAS a BDS sú rovnoramenné, čiže $|SA| = |SC|$, $|SB| = |SD|$. Takže trojuholníky SAD a SCB sú zhodné podľa vety *sss* a keďže $|EC| = |AF|$, sú zhodné aj trojuholníky SAF a SCE. Odtiaľ $|\measuredangle ASF| = |\measuredangle CSE|$ a teda $|\measuredangle FSE| = |\measuredangle ASC|$ a rovnoramenné trojuholníky FSE a ASC sú podobné. Preto $|\measuredangle SFE| = |\measuredangle SAC| = |\measuredangle SAR|$ a štvoruholník $ASRF$ je tetivový (obr. 6).

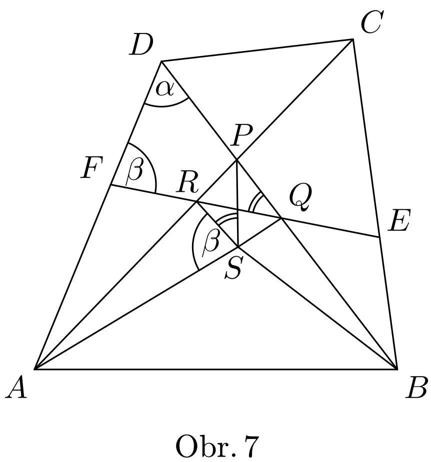
Označme $|\measuredangle ADB| = \alpha$, $|\measuredangle DFE| = \beta$. V tetivovom štvoruholníku $ASRF$ máme $|\measuredangle ASR| = 180^\circ - |\measuredangle AFR| = \beta$. V tetivovom štvoruholníku $ASPD$ zasa $|\measuredangle ASP| = 180^\circ - \alpha$, t. j.

$$|\measuredangle RSP| = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Rovnako však z trojuholníka FQD máme

$$|\measuredangle RQP| = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Spolu $|\measuredangle RSP| = |\measuredangle RQP|$ a štvoruholník $PRSQ$ je tetivový (obr. 7). Bod S preto leží na kružnici opísanej trojuholníku PQR. Keďže poloha bodu S nezávisí na voľbe bodov E, F, úloha je vyriešená.



Obr. 7

6. *V matematickej súťaži bolo súťažiacim zadaných 6 úloh. Každú dvojicu úloh vyriešili viac ako 2/5 súťažiacich. Nikto nevyriešil všetkých 6 úloh. Dokážte, že práve 5 úloh vyriešili aspoň dvaja súťažiaci.* (*Rumunsko*)

Riešenie. Označme n počet všetkých súťažiacich a N počet všetkých vyriešených dvojíc úloh (pre každého súťažiaceho do N započítame každú dvojicu úloh, ktorú vyriešil, t. j. ak vyriešil r úloh, do N započítame $\binom{r}{2}$). Každú z 15 dvojíc vyriešili viac ako 2/5 všetkých súťažiacich, čiže aspoň $(2n+1)/5$ súťažiacich, preto

$$N \geqq 15 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n+3. \qquad (1)$$

Predpokladajme, že 5 úloh vyriešilo k účastníkov. Každý z nich vyriešil 10 dvojíc úloh, zatiaľ čo každý zo zvyšných $n-k$ účastníkov vyriešil nanajvýš 6 dvojíc úloh, takže

$$N \leqq 10k + 6(n-k) = 6n + 4k.$$

Z uvedených dvoch odhadov je zrejmé, že $k \geqq 1$. Ak by navyše $(2n+1)/5$ nebolo celé číslo, každú dvojicu úloh by vyriešilo aspoň $(2n+2)/5$ účastníkov a prvý odhad by mal tvar $N \geqq 6n+6$, čo by viedlo k nerovnosti $k \geqq 2$ a úloha by bola vyriešená. Podobne, ak by niektorý účastník vyriešil menej ako 4 úlohy, vyriešil by nanajvýš 3 dvojice úloh a druhý odhad by mal tvar $N \leqq 6n+4k-3$, čo spolu s (1) takisto dáva $k \geqq 2$.

Ostáva teda vylúčiť prípad, že $2n+1$ je deliteľné piatimi, jeden účastník (nazvime ho *víťaz*) vyriešil 5 úloh a každý iný účastník vyriešil práve 4 úlohy. Predpokladajme, že taká situácia nastala. V takom prípade $N = 6n+4$ (víťaz vyriešil 10 dvojíc úloh, zvyšní účastníci po 6 dvojíc úloh). Máme tak jednu dvojicu úloh (nazvime ju *špeciálna*), ktorú vyriešilo práve $(2n+1)/5+1$ účastníkov a 14 dvojíc úloh, ktoré vyriešilo práve $(2n+1)/5$ účastníkov (inak by sme pri odhade (1) dostali buď $N \geqq 6n+5$ alebo $N = 6n+3$, čo je v rozpore s práve odvodenou hodnotou N).

Nazvime úlohu, ktorú víťaz nevyriešil, *ťažká*. Označme M počet vyriešených dvojíc úloh, z ktorých jedna je ťažká. Pre každú z piatich dvojíc obsahujúcich ťažkú úlohu máme buď $(2n+1)/5$ alebo $(2n+1)/5+1$ účastníkov, ktorí obe úlohy z dvojice vyriešili. Takže $M = 2n+1$ alebo $M = 2n+2$ (druhá možnosť nastane, ak špeciálna dvojica obsahuje ťažkú úlohu). Na druhej strane, ak ťažkú úlohu vyriešilo m účastníkov, tak $M = 3m$, pretože každý z nich vyriešil okrem ťažkej úlohy práve 3 ďalšie. Spolu dostávame, že $2n+1 \equiv 0$ alebo $2 \pmod 3$.

Zvoľme teraz ľubovoľnú úlohu u, ktorá nie je ťažká a nie je ani v špeciálnej dvojici (také sú aspoň tri). Označme L počet vyriešených dvojíc úloh, z ktorých jedna je u. Zrejme $L = 2n+1$ (každú z piatich dvojíc úloh obsahujúcich u vyriešilo práve $(2n+1)/5$ účastníkov). Na druhej strane, ak úlohu u okrem víťaza vyriešilo ešte ℓ ďalších účastníkov, tak $L = 3\ell + 4$ (víťaz okrem u vyriešil 4 ďalšie úlohy, t. j. vyriešil 4 dvojice obsahujúce u, ostatných ℓ vyriešilo 3 dvojice obsahujúce u). Dostávame $2n+1 \equiv 1 \pmod 3$, čo je v spore s predchádzajúcimi možnosťami.