

2012/2013  
62. ročník MO

Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

(Súťaž sa konala 23. – 26. 6. 2013.)

1. Daný je tetivový štvoruholník  $ABCD$ , pričom  $|BC| = |CD|$ . Nech  $\omega$  je kružnica so stredom  $C$  dotýkajúca sa strany  $BD$ . Označme  $I$  stred kružnice vpísanej trojuholníku  $ABD$ . Dokážte, že priamka prechádzajúca bodom  $I$ , ktorá je rovnobežná s  $AB$ , sa dotýka kružnice  $\omega$ .

(Kamil Duszenko)

2. Dokážte, že pre každé reálne číslo  $x > 0$  a každé celé číslo  $n > 0$  platí

$$x^n + \frac{1}{x^n} - 2 \geq n^2 \left( x + \frac{1}{x} - 2 \right).$$

(Kamil Duszenko)

3. Pre každé racionálne číslo  $r$  uvažujme tvrdenie: Ak  $x$  je reálne číslo také, že čísla  $x^2 - rx$  a  $x^3 - rx$  sú obe racionálne, tak  $x$  je tiež racionálne.

a) Dokážte tvrdenie pre  $r \geq \frac{4}{3}$  a pre  $r \leq 0$ .

b) Nech  $p, q$  sú rôzne nepárne prvočísla také, že  $3p < 4q$ . Dokážte, že tvrdenie pre  $r = \frac{p}{q}$  neplatí.

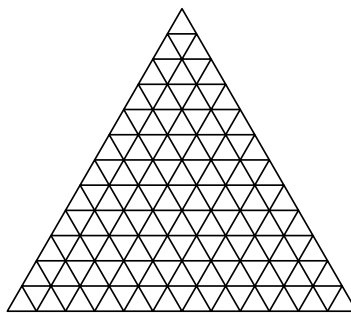
(Jaromír Šimša)

4. Nech  $a, b$  sú celé čísla, pričom  $b$  nie je druhou mocninou celého čísla. Dokážte, že  $x^2 + ax + b$  môže byť druhou mocninou celého čísla len pre konečne veľa celočíselných hodnôt  $x$ .

(Martin Panák)

5. Trojuholníková sieť rozdeľuje rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky  $n$  na  $n^2$  trojuholníkových buniek (obr. 1). Niektoré bunky sú infikované. Bunka, ktorá zatiaľ nie je infikovaná, sa infikuje, ak susedí (stranou) s aspoň dvoma už infikovanými bunkami. Určte pre  $n = 12$  najmenší možný počet na začiatku infikovaných buniek, pri ktorom je možné, že po čase budú infikované všetky bunky pôvodného trojuholníka.

(Radek Horenský)



Obr. 1

6. Daný je trojuholník  $ABC$  a jemu opísaná kružnica. Bod  $P$  je stredom oblúka  $BAC$ . Kružnica s priemerom  $CP$  pretína os uhla  $BAC$  v bodoch  $K, L$  ( $|AK| < |AL|$ ). Bod  $M$  je obrazom bodu  $L$  v osovej súmernosti podľa priamky  $BC$ . Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku  $BKM$  prechádza stredom úsečky  $BC$ .

(Dominik Burek, Tomasz Cieśla)