

2012/2013

62. ročník Matematickej olympiády

Zadania úloh IMO

(Súťaž sa konala 22. – 28. 7. 2013.)

1. Dokážte, že ku každej dvojici kladných celých čísel k a n existuje k kladných celých čísel m_1, m_2, \dots, m_k (nie nutne rôznych) takých, že

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

(Japonsko)

2. Konfigurácia 4027 bodov v rovine sa nazýva *kolumbijská*, ak pozostáva z 2013 červených a 2014 modrých bodov a žiadne tri body tejto konfigurácie neležia na jednej priamke. Ak nakreslíme niekoľko priamok, rovina sa rozdelí na niekoľko oblastí. Rozloženie priamok je *dobré* pre kolumbijskú konfiguráciu, ak sú splnené dve nasledovné podmienky:

- žiadna priamka neprechádza žiadnym bodom konfigurácie;
- žiadna oblasť neobsahuje body oboch farieb.

Nájdite najmenšiu hodnotu k takú, že pre každú kolumbijskú konfiguráciu 4027 bodov existuje dobré rozloženie k priamok. (Austrália)

3. Nech kružnica pripísaná k strane BC trojuholníka ABC sa dotýka strany BC v bode A_1 . Definujme body B_1 na CA a C_1 na AB analogicky, použijúc pripísané kružnice k stranám CA a AB . Predpokladajme, že stred kružnice opísanej trojuholníku $A_1B_1C_1$ leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC . Dokážte, že trojuholník ABC je pravouhlý. (Rusko)

4. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s ortocentrom H a nech W je vnútorný bod strany BC . Body M a N sú postupne päty výšok z bodov B a C . Označme ω_1 kružnicu opísanú trojuholníku BWN a nech X je taký bod na ω_1 , že WX je jej priemerom. Analogicky označme ω_2 kružnicu opísanú trojuholníku CWM a nech Y je taký bod na ω_2 , že WY je jej priemerom. Dokážte, že body X , Y a H ležia na jednej priamke. (Thajsko)

5. Nech \mathbb{Q}^+ je množina kladných racionálnych čísel. Nech $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia spĺňajúca nasledovné tri podmienky:

- pre všetky $x, y \in \mathbb{Q}^+$ platí $f(x)f(y) \geq f(xy)$;
- pre všetky $x, y \in \mathbb{Q}^+$ platí $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;
- existuje racionálne číslo $a > 1$ také, že $f(a) = a$.

Dokážte, že $f(x) = x$ pre všetky $x \in \mathbb{Q}^+$. (Bulharsko)

6. Nech $n \geq 3$ je celé číslo. Uvažujme kružnicu a na nej $n + 1$ rovnomerne rozložených bodov. Uvažujme všetky také označenia týchto bodov znakmi $0, 1, \dots, n$, že každý znak je použitý práve raz. Dve takéto označenia sa považujú za zhodné, ak jedno z nich je možné dostať z druhého rotáciou kružnice. Označenie sa nazýva *krásne*, ak pre ľubovoľné štyri znaky $a < b < c < d$ také, že $a + d = b + c$, tetiva spájajúca body označené znakmi a a d nepretína tetivu spájajúcu body označené znakmi b a c . Nech M je počet krásnych označení a nech N je počet usporiadaných dvojíc (x, y) nesúdeliteľných kladných celých čísel takých, že $x + y \leq n$. Dokážte, že

$$M = N + 1.$$

(Rusko)