59. ročník Matematickej olympiády
2009/2010 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie B*

---

1. *Na stole ležia tri kôpky zápaliek: v jednej 2 009, v druhej 2 010 a v poslednej 2 011. Hráč, ktorý je na ťahu, zvolí dve kôpky a z každej z nich odoberie po jednej zápalke. V hre sa pravidelne striedajú dvaja hráči. Hra končí, akonáhle niektorá kôpka zmizne. Vyhráva ten hráč, ktorý urobil posledný ťah. Popíšte stratégiu jedného z hráčov, ktorá mu zaručí výhru.* (Ján Mazák)

Riešenie. Ak sú počty zápaliek na jednotlivých kôpkach a, b, c, povieme, že hra je v pozícii (a, b, c). Celkový počet zápaliek je na začiatku párny a po každom ťahu sa zmenší o 2, preto ostáva stále párny. Ak zanechá niektorý hráč po svojom ťahu pozíciu $(2, 2, c)$, pričom c je nejaké kladné párne číslo, prinúti súpera vytvoriť aspoň jednu jednozápalkovú kôpku a to mu umožní ďalším ťahom vyhrať. Pozícia $(2, 2, c)$ mohla vzniknúť z pozície $(3, 3, c)$ alebo z pozície $(3, 2, c + 1)$, teda z pozícií, v ktorých sú dve čísla nepárne a jedno párne.

Dokážeme, že zanechávanie pozícií s tromi párnymi číslami zabezpečí výhru. Z takej pozície súper akýmkoľvek svojím ťahom vytvorí pozíciu s dvoma číslami nepárnymi a jedným párnym. Ak potom odoberieme zápalky z tých istých kôpok ako v predošlom ťahu súper (teda z tých, kde sú nepárne počty zápaliek), vytvoríme opäť pozíciu s tromi párnymi číslami. Stratégia zanechávania pozícií s tromi párnymi číslami je teda realizovateľná (za predpokladu, že celkový počet zápaliek je párny). Celkový počet zápaliek sa stále zmenšuje a počty zápaliek na jednotlivých kôpkach sa po každom ťahu zmenšia najviac o 1. Preto musí dôjsť k situácii, keď aspoň na jednej kôpke ostane presne jedna zápalka. To sa ale môže stať len po súperovom ťahu (číslo 1 je totiž nepárne). Odobratím tejto zápalky spolu s ktoroukoľvek ďalšou hru víťazne zakončíme.

Opísanú stratégiu môže použiť hráč, ktorý začína, ak odoberie vo svojom prvom ťahu po jednej zápalke z prvej a tretej kôpky. Ak ale urobí iný ťah, môže víťaznú stratégiu uplatniť jeho súper.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. V miske je 100 bielych a 110 čiernych guliek. Hráč môže v každom svojom ťahu odobrať jednu bielu alebo jednu čiernu alebo jednu bielu spolu s jednou čiernou guľkou. Dvaja hráči sa pravidelne striedajú v ťahoch. Vyhráva ten, po ktorého ťahu ostane miska prázdna. Opíšte víťaznú stratégiu pre niektorého hráča. [Zanechávať v miske párny počet bielych aj párny počet čiernych, môže ju uplatniť hráč, ktorý nezačína.]

N2. Na kôpke je 2 009 zápaliek. V každom ťahu môže hráč odobrať jednu alebo dve zápalky. Dvaja hráči sa pravidelne striedajú v ťahoch. Ten, ktorý vezme poslednú zápalku, prehráva. Opíšte víťaznú stratégiu pre niektorého hráča. [Zanechať na kôpke po každom ťahu $3k + 1$ zápaliek, môže ju uplatniť začínajúci hráč.]

D1. Na jednej kôpke je 2 009, na druhej 2 020 zápaliek. V každom ťahu si hráč zvolí jednu kôpku a odoberie z nej jednu alebo dve zápalky. Dvaja hráči sa pravidelne striedajú v ťahoch. Vyhráva ten, po ktorého ťahu neostane na stole žiadna zápalka. Opíšte víťaznú stratégiu pre niektorého hráča. [Zanechávať také počty zápaliek, aby ich rozdiel bol deliteľný tromi, môže ju uplatniť začínajúci hráč.]

---

2. *Na tabuli je napísané štvorciferné číslo, ktoré má presne šesť kladných deliteľov, z ktorých práve dva sú jednociferné a práve dva dvojciferné. Väčší z dvojciferných deliteľov je druhou mocninou prirodzeného čísla. Určte všetky čísla, ktoré môžu byť na tabuli napísané.* (Peter Novotný)

Riešenie. Počet kladných deliteľov čísla, ktorého rozklad na súčin prvočísel má tvar $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$, je $(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_r+1)$. Číslo, ktoré má presne 6 kladných deliteľov, musí mať jeden z tvarov p^5 alebo p^2q, pričom p a q sú prvočísla.

Uvažujme najskôr tvar p^5. Toto číslo má delitele 1, p, p^2, p^3, p^4, p^5; zrejme $1 < p < p^2 < p^3 < p^4 < p^5$. Dva najmenšie delitele sú jednociferné a ďalšie dva dvojciferné. Väčší z nich, teda p^3, ale nie je druhou mocninou prirodzeného čísla.

Hľadané číslo má teda tvar p^2q a jeho delitele sú 1, p, p^2, q, pq, p^2q. Ak $p > q$, potom $1 < q < p < pq < p^2 < p^2q$. Dva dvojciferné delitele by boli p a pq, ale pq nie je druhou mocninou prirodzeného čísla.

Musí teda byť $p < q$. Zo všetkých šiestich deliteľov sú druhými mocninami prirodzeného čísla len 1 a p^2. Preto je p^2 väčší z dvoch dvojciferných deliteľov a odtiaľ vyplýva $1 < p < q < p^2 < pq < p^2q$. Delitele 1 a p sú jednociferné, q a p^2 sú dvojciferné, pq aspoň trojciferný a p^2q štvorciferný. Odtiaľ vyplýva $p \in \{5, 7\}$, $9 < q < p^2$, $pq > 99$, $999 < p^2q < 10\,000$.

Pre $p = 5$ dostávame $9 < q < 25$, $5q > 99$ a $999 < 25q < 10\,000$, takže žiadne prvočíslo q nevyhovuje.

Pre $p = 7$ dostávame $9 < q < 49$, $7q > 99$ a $999 < 49q < 10\,000$; týmto podmienkam vyhovujú $q \in \{23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$.

Na tabuli je teda napísané jedno zo siedmich čísel $49 \cdot 23 = 1\,127$, $49 \cdot 29 = 1\,421$, $49 \cdot 31 = 1\,519$, $49 \cdot 37 = 1\,813$, $49 \cdot 41 = 2\,009$, $49 \cdot 43 = 2\,107$, $49 \cdot 47 = 2\,303$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktoré má presne 2 009 kladných deliteľov. [$2^{40} \cdot 3^6 \cdot 5^6 = 12\,524\,124\,635\,136\,000\,000$]

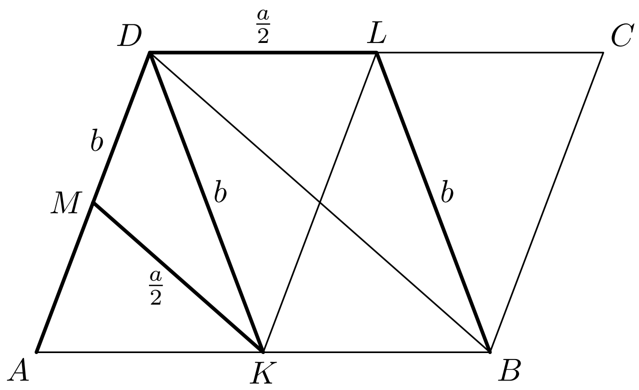
N2. Ktoré štvorciferné čísla majú najviac deliteľov? [7 560 a 9 240; majú každé 64 kladných deliteľov.]

D1. Nájdite všetky nepárne štvorciferné čísla, ktoré majú viac ako 10 kladných deliteľov, z ktorých aspoň 30% sú druhé mocniny prirodzených čísel. [1 125, 1 323, 2 025, 3 087, 3 267, 3 969, 4 563, 6 075, 6 125, 7 803, 8 575, 9 747, 9 801]

---

3. *V rovine je daná úsečka AB. Zostrojte rovnobežník $ABCD$, pre ktorého stredy strán AB, CD, DA označené postupne K, L, M platí: body A, B, L, D ležia na jednej kružnici a aj body K, L, D, M ležia na jednej kružnici.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Označme $a = |AB|$, $b = |AD|$ dĺžky strán hľadaného rovnobežníka (obr. 1). Lichobežníku $ABLD$ sa dá opísať kružnica, preto je rovnoramenný, a teda $|BL| = b$. Keďže sú úsečky KB a DL rovnobežné a zhodné, je $KBLD$ rovnobežník, a preto $|KD| = |BL| = b$. To znamená, že trojuholník AKD je rovnoramenný, takže bod D musí ležať na osi jeho základne AK.



Obr. 1

Úsečka KL je strednou priečkou rovnobežníka $ABCD$, preto $KL \parallel MD$; $KLDM$ je teda lichobežník, a pretože sa mu dá opísať kružnica, je rovnoramenný; odtiaľ $|KM| = |DL| = \frac{1}{2}a$. Keďže KM je stredná priečka trojuholníka BDA, má strana BD dĺžku $2 \cdot |KM| = a$. Bod D teda leží na kružnici so stredom B a polomerom a.

Konštrukcia. Zostrojíme stred K úsečky AB, os o úsečky AK a kružnicu k so stredom B a polomerom $|AB|$. Priesečník tejto kružnice s osou úsečky AK je bod D. Bod C je potom priesečník priamok vedených bodmi D a B rovnobežne s priamkami AB a AD.

Dôkaz správnosti konštrukcie. Štvoruholník $ABCD$ má protiľahlé strany rovnobežné, je to teda rovnobežník. Označíme L a M stredy úsečiek CD a AD. Z toho, že bod D leží na osi úsečky AK, vyplýva $|KD| = |AD|$. Keďže $KBLD$ je rovnobežník, platí $|BL| = |KD| = |AD|$. Lichobežník $ABDL$ je teda rovnoramenný, a preto body A, B, L, D ležia na jednej kružnici. Úsečka KM je stredná priečka trojuholníka BDA, preto $|KM| = \frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2}|AB| = |DL|$; $KLDM$ je teda rovnoramenný lichobežník, a preto jeho vrcholy ležia na jednej kružnici.

Diskusia. Priamka o má od bodu B menšiu vzdialenosť ako bod A, takže pretína kružnicu k v dvoch bodoch. Úloha má teda v každej polrovine s hraničnou priamkou AB jedno riešenie.

Iné riešenie. Tak ako v prvom riešení dokážeme, že $|KD| = |AD|$ a $|DB| = |AB|$. Trojuholníky AKD a DAB sú teda rovnoramenné, a keďže sa zhodujú v uhle pri vrchole A, sú podobné. Preto $|AK|/|AD| = |DA|/|AB|$, čiže $\frac{1}{2}a/b = b/a$ a odtiaľ $b = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Bod D je teda priesečníkom kružníc so stredmi A a K a polomerom $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že lichobežníku sa dá opísať kružnica práve vtedy, keď je rovnoramenný.

N2. Dokážte, že pre dĺžky strán a, b a dĺžky uhlopriečok e, f rovnobežníka platí $e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$.

D1. Strana AB rovnobežníka $ABCD$ má dĺžku a. Kružnica opísaná trojuholníku ABD pretína polpriamku opačnú k polpriamke CD v bode L; označme $x = |CL|$. Vypočítajte dĺžku tetivy, ktorú priamka CD vytína na kružnici opísanej trojuholníku ABC. [$|a - x|$]

---

4. *Nájdite 2 009 po sebe idúcich štvorciferných čísel, ktorých súčet je súčinom troch po sebe idúcich prirodzených čísel.* (Radek Horenský)

Riešenie. Označme prostredné z hľadaných čísel a. Súčet čísel $a - 1\,004$, $a - 1\,003$, $\ldots$, $a + 1\,003$, $a + 1\,004$ je $2009a = 41 \cdot 49 \cdot a$, pričom $2\,004 \leqq a \leqq 8\,995$. Má platiť

$41 \cdot 49 \cdot a = n(n+1)(n+2)$ pre vhodné prirodzené číslo n. Keďže $2\,009 \cdot 2\,004 \leqq n(n+ + 1)(n+2) < (n+1)^3$, musí platiť $n+1 > \sqrt[3]{2\,009 \cdot 2\,004}$, a teda $n \geqq 159$. Podobne z nerovností $2\,009 \cdot 8\,995 \geqq n(n+1)(n+2) > n^3$ dostávame $n < \sqrt[3]{2\,009 \cdot 8\,995}$, čiže $n \leqq 262$.

Súčin $n(n+1)(n+2)$ má byť deliteľný číslami 41 a 49. Žiadny z činiteľov n, $n+1$, $n+2$ nemôže byť deliteľný oboma číslami 41 aj 49, lebo $41 \cdot 49 > 262 + 2$. Siedmimi je deliteľný nanajvýš jeden z činiteľov n, $n+1$, $n+2$; preto musí niektorý z nich byť deliteľný číslom 49. Budeme teda medzi číslami 159, 160, ..., 264 hľadať také dve, ktorých rozdiel je 1 alebo 2, pričom jedno z nich je deliteľné číslom 41 a druhé číslom 49. Násobky čísla 41 sú 164, 205 a 246, násobky čísla 49 sú 196 a 245. Vyhovujúce čísla sú teda 245 a 246 a máme dve možnosti:

a) $n = 245$, $n+1 = 246$, $n+2 = 247$, $a = 245 \cdot 246 \cdot 247/2\,009 = 7\,410$ a hľadané čísla sú 6 406, 6 407, ..., 8 414;

b) $n = 244$, $n+1 = 245$, $n+2 = 246$, $a = 244 \cdot 245 \cdot 246/2\,009 = 7\,320$ a hľadané čísla sú 6 316, 6 317, ..., 8 324.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Nájdite 20 po sebe idúcich prirodzených čísel, ktorých súčet je druhou mocninou prirodzeného čísla. [Také čísla neexistujú.]

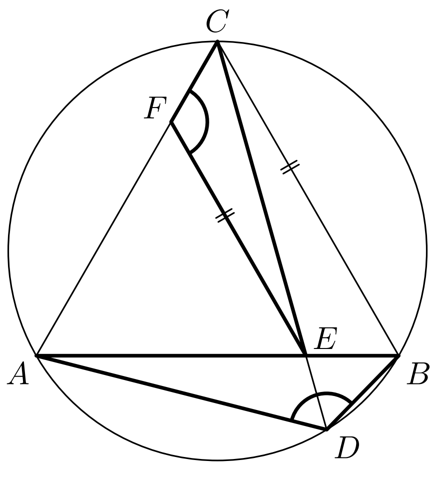
N2. Nájdite 2 009 po sebe idúcich päťciferných čísel, ktorých súčet je treťou mocninou prirodzeného čísla. [10 763, 10 764, ..., 12 771 alebo 93 132, 93 133, ..., 95 140]

D1. Súčet druhých mocnín jedenástich po sebe idúcich trojciferných čísel je násobkom čísla 2 009; nájdite tieto čísla. [508, 509, ..., 518 alebo 753, 754, ..., 763]

---

5. *Vnútri kratšieho oblúka AB kružnice opísanej rovnostrannému trojuholníku ABC je zvolený bod D. Tetiva CD pretína stranu AB v bode E. Dokážte, že trojuholník so stranami dĺžok $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$ je podobný s trojuholníkom ABD.* (Pavel Leischner)

Riešenie. Veďme bodom E rovnobežku so stranou BC a označme F jej priesečník so stranou AC. Trojuholník AEF je rovnostranný, preto $|EF| = |AE|$ a tiež $|CF| = = |BE|$. Trojuholník FEC má teda dĺžky strán $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$. Dokážeme, že je podobný s trojuholníkom ABD (obr. 2).



Obr. 2

Uhly ACD a ABD sú obvodové nad tetivou AD, preto sú zhodné. Uhol FEC je zhodný s uhlom ECB (striedavé uhly) a ten je zhodný s obvodovým uhlom DAB. Podľa vety *uu* sú teda trojuholníky ECF a ABD naozaj podobné.

Iné riešenie. Obvodové uhly DAB a DCB sú zhodné, rovnako aj uhly ADC a ABC, a preto sú trojuholníky ADE a CBE podobné. Odtiaľ vyplýva $|AE|/|AD| = |CE|/|CB| = |CE|/|AB|$. Analogicky aj trojuholníky DEB a AEC sú podobné, odkiaľ $|BE|/|BD| = |CE|/|AC| = |CE|/|AB|$. Z rovností $|AE|/|AD| = |CE|/|AB| = |BE|/|BD|$ vyplýva podobnosť trojuholníka s dĺžkami strán $|AE|$, $|CE|$, $|BE|$ s trojuholníkom ABD.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Nech sa tetivy AB a CD kružnice k pretínajú v bode M. Dokážte, že trojuholníky AMC a DMB sú podobné.

N2. Nech E je vnútorný bod strany AB trojuholníka ABC. Označme D (pričom $D \neq C$) priesečník priamky CE s kružnicou opísanou trojuholníku ABC. Ďalej označme F priesečník strany AC s priamkou, ktorá prechádza bodom E a je rovnobežná s BC. Dokážte, že trojuholníky ABD a ECF sú podobné.

D1. Nech ABC je trojuholník, v ktorom $|AC| \neq |BC|$. Dokážte, že os uhla BCA sa s osou strany AB pretína v bode, ktorý leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

---

6. *Reálne čísla a, b majú túto vlastnosť: rovnica $x^2-ax+b-1=0$ má v množine reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých rozdiel je kladným koreňom rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.*

a) Dokážte nerovnosť $b > 3$.

b) Pomocou b vyjadrite korene oboch rovníc. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Označme x_1 menší a x_2 väčší koreň prvej rovnice. Potom platí $x_1 + x_2 = a$, $x_1x_2 = b - 1$. Druhá rovnica má koreň $x_2 - x_1$, a keďže súčet oboch koreňov je a, musí byť druhý koreň $a - (x_2 - x_1) = x_1 + x_2 - x_2 + x_1 = 2x_1$. Súčin koreňov druhej rovnice je $(x_2 - x_1) \cdot 2x_1 = b + 1$. Odtiaľ dostávame $b = -1 + 2x_1x_2 - 2x_1^2 = -1 + 2(b-1) - 2x_1^2$, a teda

$$b = 3 + 2x_1^2 > 3, \tag{1}$$

lebo z rovnosti $x_1 = 0$ by vyplývalo $b + 1 = b - 1 = 0$.

Keďže $x_2 - x_1 > 0$ a $b + 1 > 0$, musí byť aj $x_1 > 0$; z (1) máme $x_1 = \sqrt{(b-3)/2}$ a ďalej

$$x_2 = \frac{b-1}{x_1} = \frac{(b-1)\sqrt{2}}{\sqrt{b-3}}.$$

Korene druhej rovnice sú potom

$$x_2 - x_1 = \frac{b+1}{\sqrt{2(b-3)}} \qquad \text{a} \qquad 2x_1 = \sqrt{2(b-3)}.$$

Iné riešenie. Korene prvej rovnice sú

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2}, \qquad x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2},$$

pričom pre diskriminant máme

$$D = a^2 - 4(b-1) > 0. \tag{2}$$

Rozdiel koreňov $x_2 - x_1 = \sqrt{a^2 - 4b + 4}$ je koreňom druhej rovnice, a preto

$$\begin{aligned} a^2 - 4b + 4 - a\sqrt{a^2 - 4b + 4} + b + 1 &= 0, \\ a^2 - 3b + 5 &= a\sqrt{a^2 - 4b + 4}, \qquad (3) \\ a^4 + 2a^2(5 - 3b) + (3b - 5)^2 &= a^4 - 4a^2b + 4a^2, \\ (3b - 5)^2 &= a^2(2b - 6). \end{aligned}$$

Rovnosť $a = 0$ nastáva práve vtedy, keď $3b - 5 = 0$; potom by ale neplatilo (2). Preto $a^2 > 0$, $(3b-5)^2 > 0$, a teda aj $2b - 6 > 0$, čiže $b > 3$. Z (2) a (3) potom vyplýva $a > 0$, a teda $a = (3b - 5)/\sqrt{2(b-3)}$; ďalej potom

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3b - 5}{\sqrt{2(b-3)}} - \sqrt{\frac{(3b-5)^2}{2(b-3)} - 4b + 4}\right) = \sqrt{\frac{b-3}{2}},$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3b - 5}{\sqrt{2(b-3)}} + \sqrt{\frac{(3b-5)^2}{2(b-3)} - 4b + 4}\right) = \frac{(b-1)\sqrt{2}}{\sqrt{b-3}}.$$

Druhá rovnica má korene

$$x_3 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b - 4}}{2} = \frac{b + 1}{\sqrt{2(b-3)}} = x_2 - x_1,$$

$$x_4 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b - 4}}{2} = \sqrt{2(b-3)}.$$

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nájdite všetky dvojice čísel a, b, pre ktoré má každá z rovníc $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$ v množine reálnych čísel dva rôzne korene, pričom každý koreň druhej rovnice je o 1 väčší ako niektorý z koreňov prvej rovnice. [$a = -1$, $b = -3$]

N2. Nájdite všetky dvojice reálnych čísel a, b, pre ktoré majú každé dve z rovníc $x^2 - 10x + a = 0$, $x^2 - 16x + b = 0$, $x^2 - 18x + a + b = 0$ aspoň jeden spoločný koreň. [$a = b = 0$ alebo $a = 16, b = 64$]

D1. Nájdite všetky dvojice čísel a, b, pre ktoré má každá z rovníc $x^2 - 15x + a = 0$, $x^2 - 15x + b = 0$ v množine reálnych čísel dva rôzne korene, pričom kladný rozdiel koreňov každej rovnice je koreňom zvyšnej rovnice. [$a = b = 0$; $a = b = 50$; $a = 54$, $b = 36$; $a = 36$, $b = 54$]