2005/2006
55. ročník Matematickej olympiády *Riešenia úloh IMO*

1. *Nech I je stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC. Bod P z vnútra trojuholníka spĺňa*

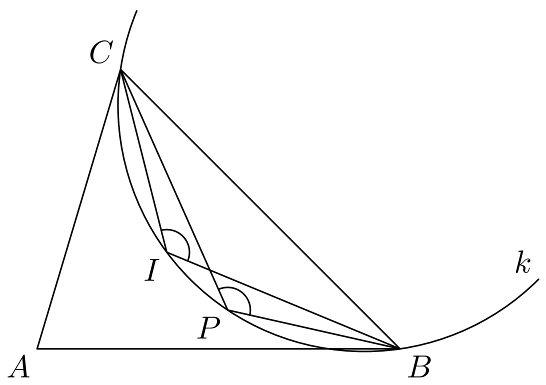
$$|\measuredangle PBA| + |\measuredangle PCA| = |\measuredangle PBC| + |\measuredangle PCB|.$$

Dokážte, že $|AP| \geqq |AI|$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $P = I$.
(Južná Kórea)

Riešenie. Označme zvyčajným spôsobom α, β, γ veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC. Keďže

$$|\measuredangle PBA| + |\measuredangle PCA| + |\measuredangle PBC| + |\measuredangle PCB| = \beta + \gamma,$$

podmienka zo zadania je ekvivalentná s rovnosťou $|\measuredangle PBC| + |\measuredangle PCB| = (\beta+\gamma)/2$, ktorá je zasa ekvivalentná s rovnosťou $|\measuredangle BPC| = 90° + \alpha/2$ (využili sme, že súčet



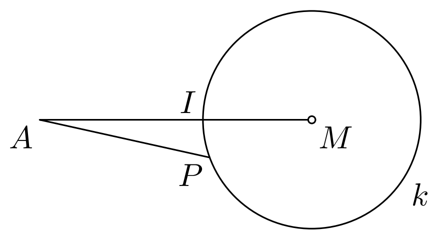
Obr. 1

uhlov v trojuholníku BCP je $180°$). Z trojuholníka BCI zasa dostávame

$$|\measuredangle BIC| = 180° - (\beta+\gamma)/2 = 90° + \alpha/2.$$

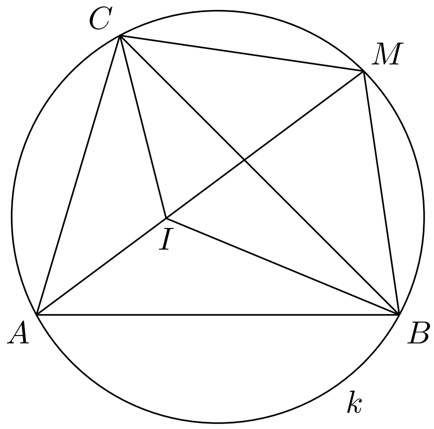
Takže $|\measuredangle BPC| = |\measuredangle BIC|$ a keďže P a I sa nachádzajú v tej istej polrovine určenej priamkou BC, ležia body B, C, I a P na jednej kružnici (obr. 1). Inými slovami, bod P leží na kružnici k opísanej trojuholníku BCI.

Označme M stred kružnice k. Na to, aby sme dokázali, že $|AP| \geqq |AI|$ a že rovnosť nastane len vtedy, keď $P = I$, stačí ukázať, že I leží na úsečke AM (obr. 2). To je však



Obr. 2

zrejmé z toho, že M je súčasne stredom oblúka BC kružnice opísanej trojuholníku ABC (toto známe tvrdenie možno ľahko odvodiť dopočítaním veľkostí uhlov v rovnoramenných trojuholníkoch CIM a BIM). Vieme totiž, že stredom oblúka BC prechádza os



Obr. 3

uhla pri vrchole A, čiže polpriamka AI (obr. 3). Tým je úloha vyriešená.

---

2. *Nech P je pravidelný 2006-uholník. Jeho uhlopriečka sa nazýva dobrá, ak jej koncové body rozdeľujú hranicu mnohouholníka P na dve časti, z ktorých každá pozostáva z nepárneho počtu strán. Strany mnohouholníka P sa tiež považujú za dobré. Predpokladajme, že P je rozdelený na trojuholníky 2003 uhlopriečkami, z ktorých žiadne dve nemajú spoločný bod vo vnútri P. Nájdite maximálny možný počet rovnoramenných trojuholníkov, ktoré majú dve dobré strany.* (Srbsko a Čierna Hora)

Riešenie. (Podľa *Ondreja Budáča*.) Rovnoramenný trojuholník s dvoma dobrými stranami nazývajme *dobrý*. Zrejme každý dobrý trojuholník má dobré ramená, a nie základňu.

Zaoberajme sa najprv špeciálnym prípadom. Nebudeme uvažovať všetkých 2006 vrcholov mnohouholníka P, ale len nejaký oblúk pozostávajúci z n vrcholov ($n \geqq 2$), pričom jeho krajné body zvierajú so stredom mnohouholníka P uhol nanajvýš $180°$ (t. j. $n \leqq 1004$). Týchto n vrcholov tvorí mnohouholník X. Označme $f(n)$ maximálny možný počet dobrých trojuholníkov, ktoré môžu vzniknúť rozdelením X na trojuholníky jeho uhlopriečkami. Ľahko možno skúšaním overiť, že $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f(4) = 1$, $f(5) = 2$, ... Dokážeme matematickou indukciou, že

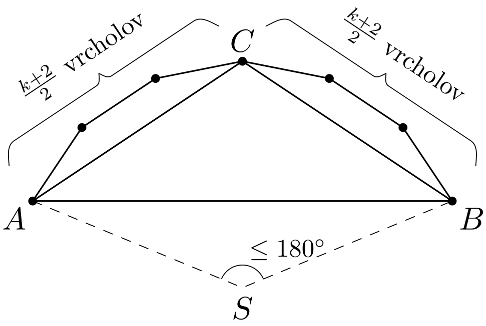
$$f(n) \leqq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor .$$

Prvý indukčný krok sme už urobili. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n \leqq k$ a zoberme oblúk pozostávajúci z $n = k+1$ vrcholov. Krajné body tohto oblúka označme A, B. Uvažujme rozdelenie mnohouholníka X uhlopriečkami na trojuholníky, pri ktorom vznikne maximálny možný počet dobrých trojuholníkov. Úsečka AB je stranou nejakého trojuholníka ABC patriaceho tomuto rozdeleniu.

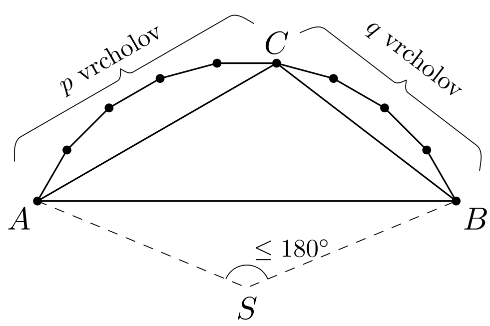
Ak trojuholník ABC je dobrý, tak vzhľadom na podmienku $n \leqq 1004$ je nutne AB jeho základňa a BC, CA sú jeho dobré ramená, takže oblúk AB pozostáva z dvoch rovnakých oblúkov nepárnych dĺžok (obr. 4). Preto $k \equiv 2 \pmod 4$. Z indukčného predpokladu potom dostávame

$$f(k+1) \leqq 1 + 2f\left(\tfrac{k+2}{2}\right) \leqq 1 + 2\left\lfloor \frac{\frac{k+2}{2}-1}{2} \right\rfloor =$$
$$= 1 + 2\left\lfloor \tfrac{k}{4} \right\rfloor = 1 + 2 \cdot \tfrac{k-2}{4} = \tfrac{k}{2} = \left\lfloor \frac{(k+1)-1}{2} \right\rfloor,$$

teda tvrdenie platí aj pre $n = k + 1$.



Obr. 4



Obr. 5

Ak trojuholník ABC nie je dobrý, tak máme oblúky AC, CB s počtami vrcholov p, q, pričom $p + q = k + 2$, $p, q \geqq 2$ (obr. 5). Takže

$$f(k+1) \leqq f(p) + f(q) = f(p) + f(k+2-p) \leqq \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+2-p-1}{2} \right\rfloor \leqq$$
$$\leqq \left\lfloor \frac{p-1}{2} + \frac{k+2-p-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(k+1)-1}{2} \right\rfloor$$

(využili sme známu nerovnosť

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqq \lfloor x + y \rfloor, \tag{1}$$

ktorá platí pre ľubovoľné kladné čísla x, y). Aj v tomto prípade teda tvrdenie pre $n = k + 1$ platí. Tým je dôkaz indukciou ukončený.

Vráťme sa teraz k pôvodnej úlohe. V rozdelení mnohouholníka P na trojuholníky určite existuje trojuholník ABC, ktorý obsahuje (vo vnútri či na obvode) jeho stred S. Oblúky AB, BC, CA majú počty vrcholov $p, q, r \leqq 1004$. Teda $p + q + r = 2006 + 3 = 2009$. V prípade, že ABC nie je dobrý, nachádza sa v rozdelení nanajvýš

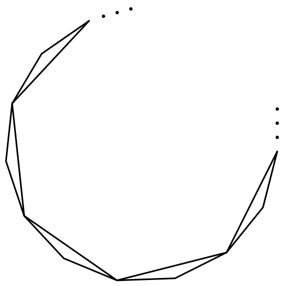
$$f(p) + f(q) + f(r) \leqq \left\lfloor \tfrac{p-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{q-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{r-1}{2} \right\rfloor \leqq \left\lfloor \frac{p-1+q-1+r-1}{2} \right\rfloor = 1003$$

dobrých trojuholníkov (opäť sme využili nerovnosť (1)).

Ak naopak ABC je dobrý, sú práve dve z čísel p, q, r párne. Bez ujmy na všeobecnosti nech sú to p, q. Potom je v rozdelení nanajvýš

$$1 + f(p) + f(q) + f(r) \leqq 1 + \left\lfloor \tfrac{p-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{q-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{r-1}{2} \right\rfloor = 1 + \tfrac{p-2}{2} + \tfrac{q-2}{2} + \tfrac{r-1}{2} = 1003$$

dobrých trojuholníkov.



Obr. 6

Ukázali sme teda, že maximálny počet dobrých trojuholníkov je 1003. Táto hodnota sa dá ľahko dosiahnuť, ako vidno na obr. 6 (po obvode „odrežeme“ 1003 rovnoramenných trojuholníčkov s ramenami dĺžky 1 a zvyšok rozdelíme ľubovoľne).

Iné riešenie. Podobne ako v prvom riešení, rovnoramenný trojuholník s dvoma dobrými stranami pochádzajúci z rozdelenia mnohouholníka P jeho uhlopriečkami nazývajme *dobrý*.

Nech ABC je dobrý trojuholník s dobrými stranami AB a BC. To znamená, že medzi vrcholmi A a B, a podobne medzi vrcholmi B a C, sa nachádza nepárny počet strán mnohouholníka P. Budeme hovoriť, že tieto strany *patria* dobrému trojuholníku ABC.

Aspoň jedna strana v každej z týchto dvoch skupín nepatrí žiadnemu inému dobrému trojuholníku, ktorého vrcholy ležia medzi vrcholmi A a B, resp. medzi B a C. Totiž každý taký dobrý trojuholník má dve zhodné strany, a teda existuje spolu párny počet strán, ktoré mu patria. Keď vylúčime všetky strany patriace dobrým trojuholníkom na tejto ploche, musí zostať aspoň jedna strana, ktorá nepatrí žiadnemu z nich. Priraďme tieto dve strany (jednu v každej z dvoch skupín) trojuholníku ABC.

Každému dobrému trojuholníku sme takto priradili dvojicu strán, pričom žiadne dva trojuholníky nemajú priradenú rovnakú stranu. Keďže takých dvojíc vieme vytvoriť maximálne 1003, je to zároveň maximálny možný počet dobrých trojuholníkov. Tento počet vieme dosiahnuť, ako sme ukázali v prvom riešení.

---

3. *Určte najmenšie reálne číslo M tak, aby nerovnosť*

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leqq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

platila pre všetky reálne čísla a, b, c. (*Írsko*)

Riešenie. Úpravou výrazu vnútri absolútnej hodnoty na ľavej strane dostaneme

$$\begin{aligned}&ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) = b(a^3-c^3)+b^3(c-a)+ca(c-a)(c+a) = \\ &= (a-c)\big(b(a^2+ac+c^2)-b^3-ca(c+a)\big) = \\ &= (a-c)\big(b(a^2-b^2)+ac(b-a)+c^2(b-a)\big) = (a-c)(a-b)\big(b(a+b)-ac-c^2\big) = \\ &= (a-c)(a-b)\big(a(b-c)+b^2-c^2\big) = (a-c)(a-b)(b-c)(a+b+c).\end{aligned}$$

Zadanú nerovnosť teda môžeme prepísať na tvar

$$|(a-c)(a-b)(b-c)(a+b+c)| \leqq M(a^2+b^2+c^2)^2. \tag{1}$$

Vzhľadom na symetriu výrazov môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $a \leqq \leqq b \leqq c$. V takomto prípade použitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dostaneme

$$|(a-b)(b-c)| = (b-a)(c-b) \leqq \left(\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right)^2 = \frac{(c-a)^2}{4}, \tag{2}$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $b-a=c-b$, t. j. $2b=a+c$. Z nerovnosti medzi aritmetickým a kvadratickým priemerom zasa máme

$$\left(\frac{(c-b)+(b-a)}{2}\right)^2 \leqq \frac{(c-b)^2+(b-a)^2}{2},$$

čo je po jednoduchej úprave ekvivalentné s

$$3(c-a)^2 \leqq 2\cdot\left[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2\right], \tag{3}$$

pričom rovnosť nastáva opäť len v prípade, keď $2b=a+c$.

Z (2) a (3) vyplýva

$$\begin{aligned}
&|(a-c)(a-b)(b-c)(a+b+c)| \leqq \\
&\leqq \tfrac14\cdot|(c-a)^3(a+b+c)| = \tfrac14\cdot\sqrt{(c-a)^6(a+b+c)^2} \leqq \\
&\leqq \frac14\cdot\sqrt{\left(\frac{2\cdot[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2]}{3}\right)^3\cdot(a+b+c)^2} = \\
&= \frac{\sqrt2}{2}\cdot\left(\sqrt[4]{\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}\right)^3\cdot(a+b+c)^2}\right)^2 \leqq \\
&\leqq \frac{\sqrt2}{2}\cdot\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2+(a+b+c)^2}{4}\right)^2 = \frac{9\sqrt2}{32}\cdot(a^2+b^2+c^2)^2.
\end{aligned}$$

Ostatný odhad vyplýva z AG-nerovnosti pre štyri čísla, z ktorých jedno je $(a+b+c)^2$ a zvyšné tri sú $[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2]/3$.

Vidíme, že pre $M=\frac{9}{32}\sqrt2$ nerovnosť (1) platí, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $2b=a+c$ a

$$\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3} = (a+b+c)^2. \tag{4}$$

Dosadením $b=(a+c)/2$ upravíme (4) na

$$2(c-a)^2 = 9(a+c)^2.$$

Podmienku na rovnosť teda možno prepísať v tvare

$$2b=a+c \qquad \text{a} \qquad (c-a)^2=18b^2.$$

Ak zvolíme $b=1$, dostaneme $a=1-\frac32\sqrt2$, $c=1+\frac32\sqrt2$. Takže $M=\frac{9}{32}\sqrt2$ je naozaj najmenšia hodnota, pre ktorú je zadaná nerovnosť splnená. Rovnosť nastáva pre trojice $(t-\frac32\sqrt2t, t, t+\frac32\sqrt2t)$ a ich permutácie, pričom t je ľubovoľné reálne číslo.

4. *Určte všetky dvojice (x, y) celých čísel takých, že*

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

(*USA*)

Riešenie. Ak je dvojica (x, y) riešením, ľahko možno ukázať, že $x \geqq 0$ a riešením je aj dvojica $(x, -y)$. Pre $x = 0$ dostaneme vyhovujúce dvojice $(0, 2)$ a $(0, -2)$. Zaoberajme sa teda iba prípadom $x, y > 0$.

Predpokladajme, že (x, y) je riešením. Rovnicu možno prepísať na tvar

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = (y - 1)(y + 1).$$

Odtiaľ vidno, že činitele $y - 1$ a $y + 1$ sú oba párne, pričom zrejme práve jeden z nich je deliteľný štyrmi. Preto $x \geqq 3$ a jeden z činiteľov je deliteľný číslom 2^{x-1}, nie však číslom 2^x. Pre nejaké nepárne prirodzené číslo m a pre vhodné znamienko teda platí

$$y = 2^{x-1}m \pm 1. \tag{1}$$

Dosadením do pôvodnej rovnice postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} 1 + 2^x + 2^{2x+1} &= (2^{x-1}m \pm 1)^2, \\ 1 + 2^x(1 + 2^{x+1}) &= 2^{2x-2}m^2 \pm 2^x m + 1, \\ 2^x(1 + 2^{x+1}) &= 2^x(2^{x-2}m^2 \pm m), \\ 1 + 2^{x+1} &= 2^{x-2}m^2 \pm m, \\ 1 \mp m &= 2^{x-2}(m^2 - 8). \end{aligned} \tag{2}$$

Ak by na ľavej strane v (2) bolo znamienko „$-$“, mali by sme $m^2 - 8 \leqq 0$, t. j. $m = 1$. Po dosadení do (2) potom $0 = -7 \cdot 2^{x-2}$, čomu nevyhovuje žiadna hodnota x.

Pre znamienko „$+$“ je ľavá strana (2) kladná, preto musí byť kladný aj výraz $m^2 - 8$, odkiaľ $m \geqq 3$. Na druhej strane z (2) dostaneme

$$1 + m = 2^{x-2}(m^2 - 8) \geqq 2(m^2 - 8),$$

čiže $2m^2 - m - 17 \leqq 0$. Odtiaľ nutne $m \leqq 3$ (pre hodnoty $m = 5, 7, 9\ldots$ je výraz $2m^2 - m - 17$ zjavne kladný). Zistili sme, že jediná vyhovujúca hodnota je $m = 3$. Po dosadení do (2) máme $x = 4$ a z (1) vyjde $y = 23$. Ľahko možno overiť, že táto dvojica naozaj vyhovuje. Riešeniami zadanej rovnice sú teda dvojice $(0, 2)$, $(0, -2)$, $(4, 23)$ a $(4, -23)$.

5. *Nech $P(x)$ je polynóm stupňa $n > 1$ s celočíselnými koeficientmi a nech k je kladné celé číslo. Uvažujme polynóm $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, kde P sa vyskytuje k-krát. Dokážte, že existuje najviac n celých čísel t takých, že $Q(t) = t$.* (Rumunsko)

Riešenie. (Podľa *Ondreja Budáča*.) Označme

$$\underbrace{P(P(\ldots P(P}_{m\text{-krát}}(x))\ldots)) = P_m(x) \qquad \text{pre } m = 1, 2, \ldots, k.$$

Predpokladajme sporom, že existuje $n+1$ rôznych celých čísel $x_0, x_1, \ldots, x_n$ takých, že $P_k(x_i) = x_i$ (pre každé $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$). Keďže P má celočíselné koeficienty, pre ľubovoľné celé čísla u, v (nie nutne rôzne) platí

$$u - v \mid P(u) - P(v), \qquad \text{a teda aj} \qquad |u - v| \leqq |P(u) - P(v)|.$$

Keď toto známe tvrdenie použijeme k-krát, pre ľubovoľné $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ dostaneme

$$|x_i - x_j| \leqq |P(x_i) - P(x_j)| \leqq |P_2(x_i) - P_2(x_j)| \leqq \cdots \leqq |P_k(x_i) - P_k(x_j)| = |x_i - x_j|.$$

Nakoľko prvý a posledný výraz sa rovnajú, musí rovnosť nastávať vo všetkých nerovnostiach. Takže $|x_i - x_j| = |P(x_i) - P(x_j)|$, t. j.

$$P(x_i) - P(x_j) = \pm(x_i - x_j) \tag{1}$$

pre vhodné znamienko. Ukážeme, že toto znamienko je pre všetky dvojice indexov rovnaké.

Označme $P(x_0) = a$. Rozoberme dva prípady pre $P(x_1)$, ktoré podľa (1) môžu nastať.

Prípad 1. Nech $P(x_1) = a + (x_1 - x_0)$. Pre ľubovoľné $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ podľa (1) platí

$$P(x_i) - a = x_i - x_0 \qquad \text{alebo} \qquad P(x_i) - a = x_0 - x_i. \tag{2}$$

Ak by pre niektoré i nastala druhá možnosť, tak $P(x_i) = a + x_0 - x_i$. Potom použitím (1) a dosadením dostaneme

$$\pm(x_i - x_1) = P(x_i) - P(x_1) = a + x_0 - x_i - (a + x_1 - x_0) = 2x_0 - x_i - x_1.$$

Pre znamienko „+“ po úprave vyjde $x_i = x_0$ a pre znamienko „−“ vyjde $x_1 = x_0$, čo sú neprípustné možnosti (čísla $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sú rôzne). Pre každé $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ preto v (2) nastáva prvá možnosť, t. j. $P(x_i) = a + x_i - x_0$. Keďže táto rovnosť podľa predpokladu platí aj pre $i = 1$ a triviálne aj pre $i = 0$, dostávame, že polynomická rovnica $P(t) - a - t + x_0 = 0$ stupňa $n \geqq 2$ (s neznámou t) má aspoň $n + 1$ rôznych koreňov $x_0, x_1, \ldots, x_n$, čo je v spore so základnou vetou algebry.

Prípad 2. Nech $P(x_1) = a + (x_0 - x_1)$. Analogicky ako v prvom prípade dostaneme, že $P(x_i) = a + x_0 - x_i$ pre každé x_i, a teda neprípustný počet koreňov má rovnica $P(t) - a - x_0 + t = 0$.

Záver. Existuje najviac n rôznych celých čísel t takých, že $Q(t) = P_k(t) = t$.

---

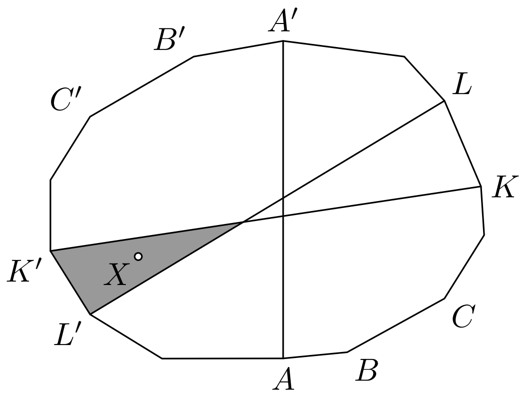
6. *Každej strane b konvexného mnohouholníka P priradíme maximálny obsah trojuholníka, ktorého jedna strana je b a ktorý je obsiahnutý v P. Dokážte, že súčet obsahov priradených všetkým stranám mnohouholníka P je aspoň dvojnásobkom obsahu mnohouholníka P.* (Srbsko a Čierna Hora)

Riešenie. Dokážeme najprv, že ľubovoľný konvexný $2n$-uholník s obsahom S má takú stranu AB a vrchol V, že obsah trojuholníka ABV je aspoň S/n.

Uhlopriečky, ktoré rozdeľujú $2n$-uholník na dve časti s rovnakým počtom strán, budeme nazývať *hlavné*. Pre každú stranu b daného $2n$-uholníka označme $\triangle_b$ taký trojuholník ABP, že A, B sú krajné body strany b a P je priesečník hlavných uhlopriečok

AA', BB'. Tvrdíme, že zjednotenie všetkých $2n$ trojuholníkov $\triangle_b$ pokrýva celý $2n$-uholník.

Nech X je ľubovoľný vnútorný bod $2n$-uholníka, ktorý neleží na žiadnej hlavnej uhlopriečke (body ležiace na obvode a na hlavných uhlopriečkach opísaným zjednotením zrejme pokryté sú). Uvažujme postupnosť (orientovaných) hlavných uhlopriečok $AA', BB', CC', \ldots$, pričom $B, C, \ldots$ sú po sebe nasledujúce vrcholy ležiace v opačnej polrovine určenej priamkou AA' ako bod X. Bez ujmy na všeobecnosti nech bod X je „naľavo" od AA'. V tejto postupnosti sa na mieste s poradovým číslom $n+1$ nachádza uhlopriečka $A'A$, ktorá má bod X „napravo". Preto v postupnosti $A, B, C, \ldots, A'$ existujú po sebe idúce vrcholy K, L také, že X leží „naľavo" od KK', ale „napravo" od LL'. To však znamená, že X leží v trojuholníku $\triangle_{K'L'}$ (obr. 7). Trojuholníky $\triangle_b$ teda naozaj pokrývajú celý $2n$-uholník. Súčet ich obsahov je preto aspoň S.

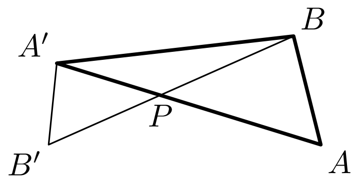


Obr. 7

Označme $S_{\mathcal{U}}$ obsah útvaru $\mathcal{U}$. Z predošlého vyplýva, že existujú dve protiľahlé strany $b = AB$, $b' = A'B'$ (pričom AA', BB' sú hlavné uhlopriečky pretínajúce sa v bode P) také, že $S_{\triangle_b} + S_{\triangle_{b'}} \geqq S/n$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $|PB| \geqq |PB'|$. Potom (obr. 8)

$$S_{ABA'} = S_{ABP} + S_{PBA'} \geqq S_{ABP} + S_{PA'B'} = S_{\triangle_b} + S_{\triangle_{b'}} \geqq S/n.$$

Tým je tvrdenie zo začiatku riešenia dokázané.



Obr. 8

Zoberme teraz ľubovoľný konvexný mnohouholník P s obsahom S, ktorý má m strán $a_1, \ldots, a_m$. Nech S_i je obsah najväčšieho trojuholníka, ktorý má stranu a_i a je celý obsiahnutý v P. Tvrdenie zo zadania dokážeme sporom. Predpokladajme, že neplatí, t. j.

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i}{S} < 2.$$

Potom existujú racionálne čísla $q_1, \dots, q_m$ také, že

$$\sum_{i=1}^{m} q_i = 2 \qquad \text{a} \qquad q_i > \frac{S_i}{S} \quad \text{pre každé } i;$$

stačí napríklad pre $i < m$ zobrať za q_i ľubovoľné racionálne číslo z intervalu

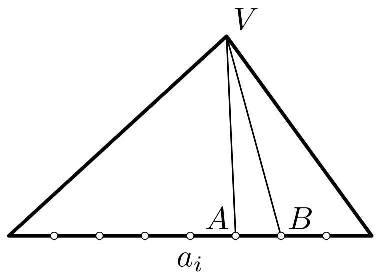
$$\left(\frac{S_i}{S}, \frac{S_i}{S} + \frac{1}{m-1}\left(2 - \sum \tfrac{S_i}{S}\right)\right)$$

a položiť $q_m = 2 - (q_1 + \dots + q_{m-1})$.

Zapíšme zlomky $q_1, \dots, q_m$ v tvare $q_i = k_i/n$, kde n je ich spoločný menovateľ. Máme teda $\sum k_i = 2n$. Keď rozdelíme každú stranu a_i mnohouholníka P na k_i zhodných úsekov, vytvoríme konvexný $2n$-uholník s obsahom S (s niektorými vnútornými uhlami veľkosti 180°). Podľa tvrdenia, ktoré sme dokázali na začiatku, má tento nový mnohouholník takú stranu AB a vrchol V, že $S_{ABV} \geqq S/n$. Ak AB je časťou strany a_i mnohouholníka P (obr. 9), tak pre obsah trojuholníka T so stranou a_i a vrcholom V dostávame

$$S_T = k_i \cdot S_{ABV} \geqq k_i \cdot S/n = q_i \cdot S > S_i,$$

čo je v rozpore s definíciou obsahu S_i. Tým je úloha vyriešená.



Obr. 9

Poznámka. Súčet priradených obsahov môže byť *práve* dvojnásobkom obsahu mnohouholníka P. Platí to pre všetky stredovo súmerné mnohouholníky.