2006/2007
56. ročník Matematickej olympiády *Riešenia úloh IMO*

1. *Dané sú reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pre každé i $(1 \leqq i \leqq n)$ definujme*

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leqq j \leqq i\} - \min\{a_j : i \leqq j \leqq n\}.$$

Nech

$$d = \max\{d_i : 1 \leqq i \leqq n\}.$$

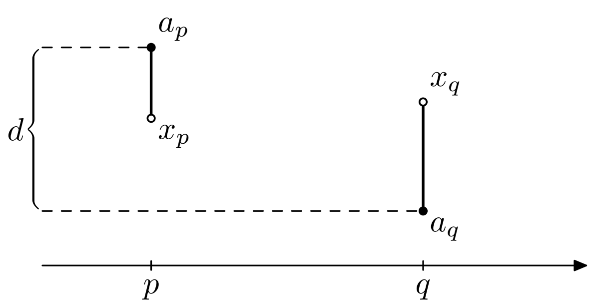
(a) *Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ platí nerovnosť*

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leqq i \leqq n\} \geqq \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) *Ukážte, že existujú také reálne čísla $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$, že v $(*)$ nastane rovnosť.*

(*Nový Zéland*)

Riešenie. (a) Každé z čísel $d_1, d_2, \ldots, d_n$, a teda aj najväčšie z nich d, je definované ako rozdiel niektorých dvoch členov postupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Existujú teda indexy p, q také, že $d = a_p - a_q$, pričom navyše $p \leqq q$. (Tieto indexy nemusia byť určené jednoznačne.)



Obr. 1

Nech $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ sú ľubovoľné reálne čísla. Na dôkaz časti (a) stačí pracovať s hodnotami x_p, x_q (obr. 1). Máme totiž $x_q \geqq x_p$, a teda

$$(a_p - x_p) + (x_q - a_q) = (a_p - a_q) + (x_q - x_p) \geqq a_p - a_q = d.$$

Preto platí aspoň jedna z nerovností $a_p - x_p \geqq \frac{d}{2}$, $x_q - a_q \geqq \frac{d}{2}$, odkiaľ dostávame

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leqq i \leqq n\} \geqq \max\{|x_p - a_p|, |x_q - a_q|\} \geqq \max\{a_p - x_p, x_q - a_q\} \geqq \frac{d}{2}.$$

(b) Položme

$$x_1 = a_1 - \frac{d}{2} \qquad \text{a} \qquad x_k = \max\left\{x_{k-1}, a_k - \frac{d}{2}\right\} \quad \text{pre } 2 \leqq k \leqq n.$$

Zrejme platí $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$. Ukážeme, že pre takto zvolené hodnoty x_i nastane v $(*)$ vždy rovnosť. Stačí ukázať, že pre každé $i = 1, 2, \dots, n$ platí $|x_i - a_i| \leqq \frac{d}{2}$ (rovnosť potom platí vďaka výsledku z časti (a), alebo aj bez toho, keďže $|x_1 - a_1| = \frac{d}{2}$).

Priamo z definície hodnoty x_i máme $x_i - a_i \geqq -\frac{d}{2}$. Ešte dokážeme, že $x_i - a_i \leqq \frac{d}{2}$. Nech $j \leqq i$ je najmenší index, pre ktorý $x_i = x_j$. Ak $j = 1$, tak $x_j = a_j - \frac{d}{2}$; ak $j \geqq 2$, tak $x_{j-1} < x_j$, čiže tiež $x_j = a_j - \frac{d}{2}$. Máme teda

$$x_i = x_j = a_j - \frac{d}{2}.$$

Z definície hodnoty d samozrejme vyplýva $a_j - a_i \leqq d$. Spolu dostávame

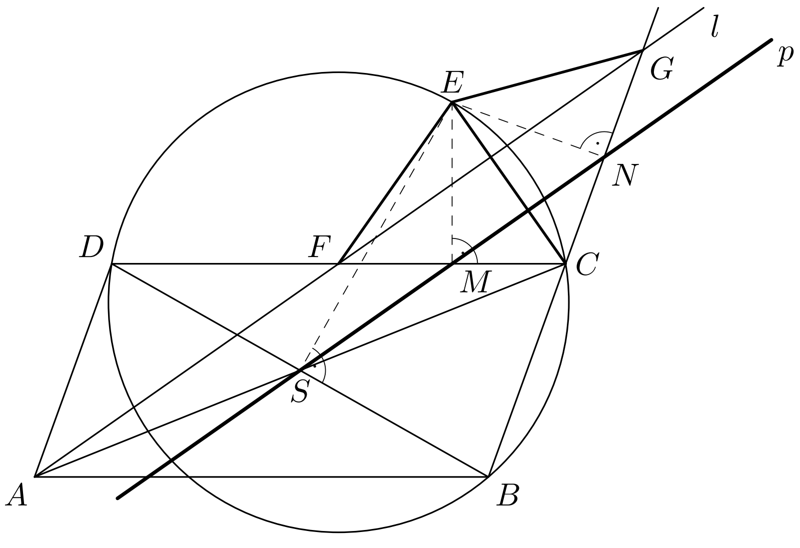
$$x_i - a_i = a_j - \frac{d}{2} - a_i \leqq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}.$$

Ukázali sme, že pre pre každé $i = 1, 2, \dots, n$ platí $-\frac{d}{2} \leqq x_i - a_i \leqq \frac{d}{2}$, teda naozaj $|x_i - a_i| \leqq \frac{d}{2}$.

---

2. *Uvažujme päť takých bodov A, B, C, D, E, že $ABCD$ je rovnobežník a štvoruholník $BCED$ je tetivový. Priamka l prechádza bodom A, pričom pretína úsečku DC v jej vnútornom bode F a priamku BC v bode G. Predpokladajme, že $|EF| = |EG| = |EC|$. Dokážte, že priamka l je osou uhla DAB.* (Luxembursko)

Riešenie. Označme postupne S, M, N stredy úsečiek CA, CF, CG. Zrejme tieto tri body ležia na jednej priamke, ktorá je obrazom priamky l v rovnoľahlosti so stredom C a koeficientom $\frac{1}{2}$. Označme ju p. Úsečky EM, EN sú výškami rovnoramenných trojuholníkov EFC, ECG, sú teda kolmé postupne na priamky CD, BC. Takže priamka p je Simsonovou priamkou[1] pre bod E a trojuholník BCD.

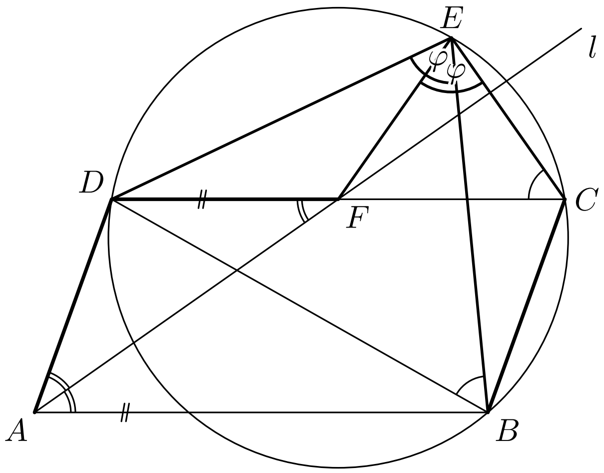


Obr. 2

[1] Veta o Simsonovej priamke hovorí, že päty kolmíc spustených z ľubovoľného bodu Q opísanej kružnice daného trojuholníka XYZ na strany tohto trojuholníka ležia na jednej priamke; uvedená priamka sa nazýva Simsonova priamka pre bod Q a trojuholník XYZ.

Uhlopriečky v rovnobežníku sa rozpoľujú, preto bod S je stredom úsečky BD, a keďže leží na Simsonovej priamke p, musí byť zároveň pätou kolmice spustenej z bodu E na stranu BD (obr. 2). Bod E je teda nutne stredom oblúka BD kružnice opísanej tetivovému štvoruholníku $BCED$ a platí $|ED| = |EB|$.

Z obvodových uhlov nad tetivou ED máme $|\measuredangle DBE| = |\measuredangle DCE|$. Takže rovnoramenné trojuholníky DBE, FCE sú podobné (ich ramená EB, EC zvierajú so základňami DB, FC rovnaké uhly, obr. 3) a môžeme označiť $|\measuredangle DEB| = |\measuredangle FEC| = \varphi$. V otočení okolo bodu E o uhol φ sa D sa zobrazí na B a F na C, preto $|DF| = |BC|$.



Obr. 3

Zároveň však $|BC| = |AD|$, odkiaľ vyplýva, že trojuholník AFD je rovnoramenný. Z toho s využitím zhodnosti striedavých uhlov dostávame

$$|\measuredangle DAF| = |\measuredangle DFA| = |\measuredangle FAB|,$$

teda priamka l je naozaj osou uhla DAB.

---

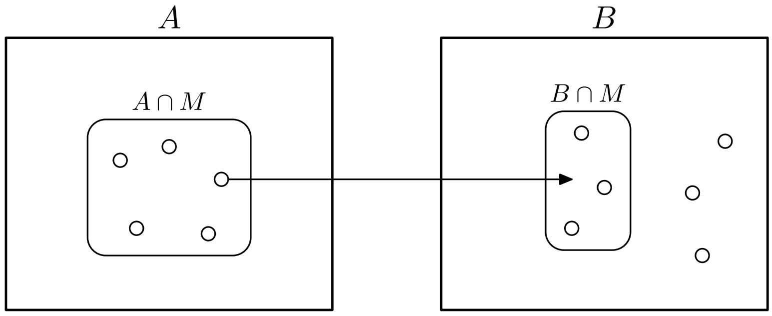
3. *Niektorí účastníci matematickej súťaže sú priatelia. Priateľstvo je vzájomné. Skupinu súťažiacich nazveme klika, ak každí dvaja z nich sú priatelia. (Špeciálne, ľubovoľná skupina pozostávajúca z menej ako dvoch súťažiacich je klika.) Počet členov kliky nazveme jej rozmerom.*

Vieme, že najväčší rozmer kliky pozostávajúcej z účastníkov súťaže je párne číslo. Dokážte, že všetkých súťažiacich možno rozsadiť do dvoch miestností tak, aby najväčší rozmer kliky v jednej miestnosti sa rovnal najväčšiemu rozmeru kliky v druhej miestnosti. (*Rusko*)

Riešenie. Uvedieme algoritmus rozdelenia účastníkov do miestností. Dve miestnosti, do ktorých budeme účastníkov rozdeľovať, označme A a B. Začneme s určitým rozdelením a budeme ho postupne upravovať posielaním účastníkov z jednej miestnosti do druhej. Počas algoritmu budeme označovať A, B množiny účastníkov, ktorí sú práve v daných miestnostiach a $c(A)$, $c(B)$ veľkosti najväčších klík v príslušných miestnostiach.

1. krok. Nech $2m$ je rozmer najväčšej kliky a M je jedna z klík s týmto rozmerom, t. j. $|M| = 2m$. Všetkých členov z M dajme do miestnosti A a všetkých ostatných do miestnosti B. Zrejme platí $c(A) = |M| \geqq c(B)$.

2. krok. Kým platí $c(A) > c(B)$, posielame účastníkov po jednom z A do B (obr. 4). (Ak $c(A) > c(B)$, miestnosť A určite nie je prázdna.)



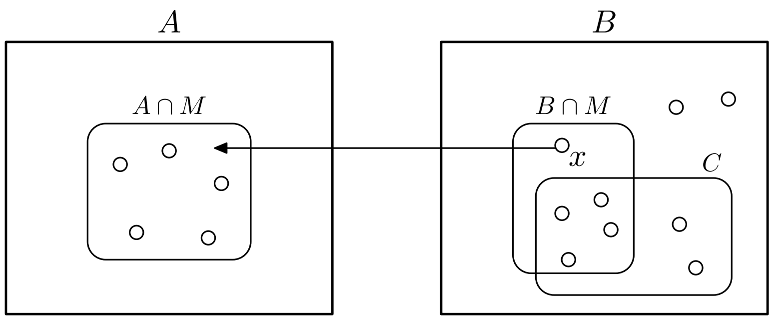
Obr. 4

Po každej zmene sa takto $c(A)$ zmenší o 1 a $c(B)$ zväčší nanajvýš o 1. Takže na konci budeme mať $c(A) \leqq c(B) \leqq c(A)+1$. Zrejme bude platiť aj $c(A) = |A| \geqq m$, inak by totiž bolo v B aspoň $m+1$ členov z M a v A nanajvýš $m-1$ členov z M, teda by bolo $c(B) - c(A) \geqq (m+1) - (m-1) = 2$.

3. krok. Nech $k = c(A)$. Ak $c(B) = k$, ukončíme rozdeľovanie.

Ak sme dosiahli $c(A) = c(B) = k$, našli sme požadované rozdelenie. Vo všetkých ostatných prípadoch máme $c(B) = k+1$. Vieme tiež, že $k = |A| = |A \cap M| \geqq m$ a $|B \cap M| \leqq m$.

4. krok. Ak existuje účastník $x \in B \cap M$ a klika $C \subset B$ taká, že $|C| = k+1$ a $x \notin C$, tak pošleme x do miestnosti A a ukončíme rozdeľovanie (obr. 5).

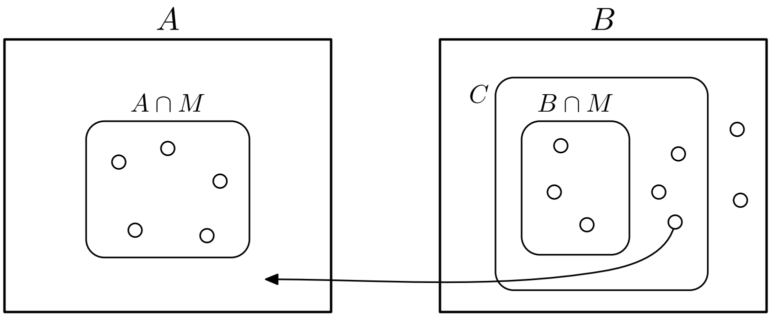


Obr. 5

Po poslaní x späť do A budeme v A mať $k+1$ členov z M, teda $c(A) = k+1$. Keďže $x \notin C$, $c(B) = |C|$ sa nezmenší, t. j. budeme mať $c(A) = c(B) = k+1$.

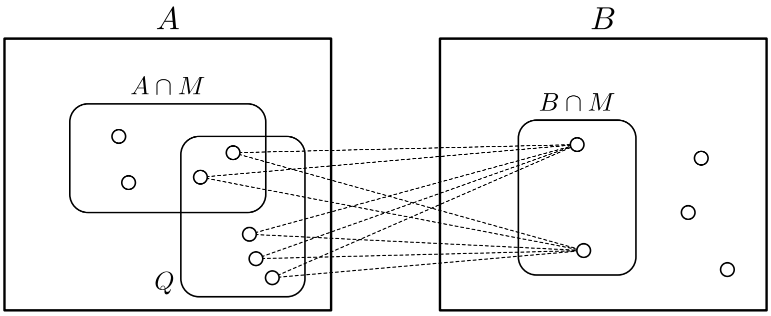
Ak účastník x spĺňajúci uvedené podmienky neexistuje, tak v miestnosti B každá klika s rozmerom $k+1$ obsahuje ako podmnožinu celý prienik $B \cap M$.

5. krok. Kým platí $c(B) = k+1$, zvolíme niektorú kliku $C \subset B$ s rozmerom $k+1$ a pošleme jedného člena z $C \setminus M$ do miestnosti A (obr. 6). (Keďže $|C| = k+1 > m \geqq$ $\geqq |B \cap M|$, množina $C \setminus M$ nemôže byť prázdna.)



Obr. 6

Zakaždým, keď pošleme jedného účastníka z B do A, zmenší sa $c(B)$ nanajvýš o 1. Na konci tohto kroku teda budeme mať $c(B) = k$. V miestnosti A máme kliku $A \cap M$ veľkosti $|A \cap M| = k$, čiže $c(A) \geqq k$. Dokážeme, že v A nie je klika s väčším rozmerom. Nech $Q \subset A$ je ľubovoľná klika. Ukážeme, že $|Q| \leqq k$. V miestnosti A, a špeciálne aj



Obr. 7

v množine Q, môžu byť dva typy účastníkov:

- Členovia M; keďže M je klika, sú to priatelia so všetkými členmi z $B \cap M$.
- Účastníci, ktorých sme do A poslali v 5. kroku; každý z nich bol v klike, ktorá obsahovala $B \cap M$, teda aj títo sú priatelia so všetkými členmi z $B \cap M$.

Takže všetci členovia Q sú priateľmi so všetkými členmi z $B \cap M$ (obr. 7). Množiny Q a $B \cap M$ sú kliky, takže aj $Q \cup (B \cap M)$ je klika. Keďže M je klika s najväčším rozmerom, máme

$$|M| \geqq |Q \cup (B \cap M)| = |Q| + |B \cap M| = |Q| + |M| - |A \cap M|,$$

odkiaľ $|Q| \leqq |A \cap M| = k$.

Po 5. kroku teda dostaneme $c(A) = c(B) = k$.

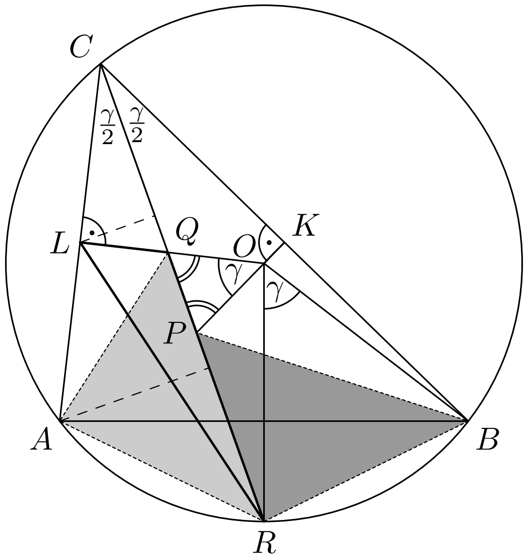
---

4. *Os uhla BCA trojuholníka ABC pretína jeho opísanú kružnicu v bode R rôznom od bodu C, os strany BC v bode P a os strany AC v bode Q. Stred strany BC označme K a stred strany AC označme L. Dokážte, že obsahy trojuholníkov RPK a RQL sa rovnajú.* (Česká rep.)

Riešenie. Ak $|AC| = |BC|$, trojuholník ABC je rovnoramenný, trojuholníky RPK, RQL sú súmerne združené podľa osi CR a zadané tvrdenie je triviálne. Ďalej bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $|AC| < |BC|$. Označme O stred kružnice opísanej trojuholníku ABC a γ veľkosť uhla ACB. Z pravouhlých trojuholníkov CLQ a CKP máme

$$|\measuredangle OQP| = |\measuredangle LQC| = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}, \qquad |\measuredangle OPQ| = |\measuredangle KPC| = 90^\circ - \frac{\gamma}{2},$$

teda uhly OQP, OPQ majú rovnakú veľkosť. Takže trojuholník OQP je rovnoramenný a ľahko dopočítame, že veľkosť jeho tretieho uhla, ktorý zvierajú zhodné ramená OQ, OP, je γ (obr. 8).



Obr. 8

Z vlastnosti stredového a obvodového uhla dostávame

$$|\measuredangle AOR| = 2|\measuredangle ACR| = \gamma, \qquad |\measuredangle ROB| = 2|\measuredangle RCB| = \gamma.$$

Navyše samozrejme $|AO| = |RO| = |BO|$. Uvažujme otočenie okolo bodu O o uhol γ. Z uvedeného vyplýva, že v tomto otočení sa Q zobrazí na P, A na R a R na B. Takže trojuholníky QAR, PRB sú zhodné a majú aj rovnaké obsahy.

Trojuholníky RQL, RQA majú spoločnú stranu RQ, pomer ich obsahov je teda rovný pomeru dĺžok ich výšok na stranu RQ. Keďže L je stred strany CA, tento pomer je zrejme $1 : 2$. Podobný vzťah dostaneme pre trojuholníky RPK, RPB. Spolu dostávame

$$S_{RQL} = \tfrac{1}{2} S_{RQA} = \tfrac{1}{2} S_{RPB} = S_{RPK}.$$

---

5. *Kladné celé čísla a, b sú také, že číslo $(4a^2-1)^2$ je deliteľné $4ab-1$. Dokážte, že $a = b$.* (*Veľká Británia*)

Riešenie. Dvojicu (a, b) prirodzených čísel nazveme *zlá*, ak $4ab - 1 \mid (4a^2-1)^2$. Inak povedané, ak (a, b) je zlá dvojica, tak existuje také prirodzené číslo k, že $k(4ab-1) = (4a^2-1)^2$. Po jednoduchej úprave dostaneme

$$4a(bk - 4a^3 + 2a) - 1 = k.$$

Označme $c = bk - 4a^3 + 2a$. Zrejme c je celé, a vzhľadom na rovnosť $k + 1 = 4ac$ musí byť aj kladné. A keďže $k = 4ac - 1$ je deliteľom čísla $(4a^2-1)^2$, dvojica (a, c) je zlá. Navyše ak $a < b$, tak $4a^2 - 1 < 4ab - 1$, čiže aj $(4a^2-1)^2 < (4ab-1)(4a^2-1)$, a preto

$$4ac - 1 = k = \frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1} < 4a^2 - 1.$$

Odtiaľ máme $c < a$. Ku každej zlej dvojici (a, b) s vlastnosťou $a < b$ teda existuje zlá dvojica (a, c) s vlastnosťou $c < a$.

Ak chápeme výraz $4ab - 1$ ako lineárny dvojčlen v premennej a, postupným vydelením mnohočlena $(4a^2 - 1)^2 = 16a^4 - 8a^2 + 1$ uvedeným dvojčlenom (a prenásobením číslom $16b^4$, aby sme sa vyhli zlomkom) dostaneme

$$16b^4(4a^2 - 1)^2 = (4ab - 1)(64a^3b^3 + 16a^2b^2 - 32ab^3 + 4ab - 8b^2 + 1) + (4b^2 - 1)^2.$$

Z tejto identity priamo vyplýva, že ak $4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2$, tak aj $4ab - 1 \mid (4b^2 - 1)^2$. Teda ak (a, b) je zlá dvojica, tak aj (b, a) je zlá dvojica.

Predpokladajme že existuje nejaká zlá dvojica rôznych čísel. Potom existuje aj dvojica (a, b) s vlastnosťou $a \neq b$, v ktorej a je minimálne možné.

Ak $a < b$, podľa prvého odstavca existuje $c < a$ také, že dvojica (a, c) je zlá, a podľa druhého odstavca je potom aj dvojica (c, a) zlá, čo je v spore s minimálnosťou a.

Ak $a > b$, tak podľa druhého odstavca je aj dvojica (b, a) zlá a podľa prvého odstavca existuje $c < b < a$ také, že dvojica (b, c) je zlá. Potom podľa druhého odstavca je aj dvojica (c, b) zlá, čo je opäť v spore s minimálnosťou a.

Záver. Pre každú zlú dvojicu (a, b) platí $a = b$.

---

6. *Nech n je kladné celé číslo. Uvažujme množinu*

$$S = \{(x, y, z) \ : \ x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, \ x + y + z > 0\}$$

pozostávajúcu z $(n + 1)^3 - 1$ bodov trojrozmerného priestoru. Určte najmenší možný počet rovín, ktorých zjednotenie obsahuje všetky body z S, ale neobsahuje bod $(0, 0, 0)$.

(*Holandsko*)

Riešenie. Najmenší možný počet rovín je $3n$. Ľahko nájdeme $3n$ rovín, ktoré spĺňajú zadané podmienky. Môžeme napríklad zobrať roviny s rovnicami $x = i$, $y = i$, $z = i$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Iným vyhovujúcim príkladom sú roviny s rovnicami $x + y + z = k$ pre $k = 1, 2, \ldots 3n$. Ukážeme, že menej ako $3n$ rovín nestačí. Dokážeme najskôr pomocné tvrdenie.

Lema. Nech $P(x_1, \ldots, x_k)$ je nenulový polynóm k premenných. Ak $P(x_1, \ldots, x_k) = 0$ pre ľubovoľné $x_1, \ldots, x_k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ také, že $x_1 + \cdots + x_k > 0$ a $P(0, \ldots, 0) \neq 0$, tak $\deg P \geqq kn$. (Pod $\deg P$ rozumieme *stupeň* polynómu P, t. j. exponent najvyššej mocniny x vo výraze $P(x, \ldots, x)$.)

Lemu dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na k. Pre $k = 1$ jej platnosť zabezpečí známe tvrdenie. Podľa neho, ak má nenulový polynóm jednej premennej n koreňov (v našom prípade by koreňmi boli čísla $1, 2, \ldots, n$), tak má stupeň aspoň n.

Predpokladajme, že lema platí pre $k = m$. Dokážeme, že potom platí aj pre $k = m + 1$. Kvôli prehľadnosti označme $y = x_{m+1}$. Keď chápeme P ako polynóm v premennej y, môžeme ho vydeliť polynómom $Q(y) = y(y - 1) \cdots (y - n)$. Pri delení dostaneme ako zvyšok polynóm R. Presnejšie,

$$P(x_1, \ldots, x_m, y) = Q(y) \cdot S(x_1, \ldots, x_m, y) + R(x_1, \ldots, x_m, y),$$

kde $\deg_y R \leqq n$ (t. j. stupeň zvyšku R, keď ho chápeme ako polynóm v jednej premennej y, je menší ako stupeň polynómu Q). Keďže $Q(y) = 0$ pre $y = 0, 1, \ldots, n$, máme

$R(x_1, \dots, x_m, y) = P(x_1, \dots, x_m, y)$ pre ľubovoľné $x_1, \dots, x_m, y \in \{0, 1, \dots, n\}$, čiže R spĺňa podmienky lemy. Zrejme $\deg R \leqq \deg P$, stačí teda dokázať, že $\deg R \geqq (m+1)n$.

Rozpíšme R podľa mocnín y:

$$R(x_1, \dots, x_m, y) = R_n(x_1, \dots, x_m)y^n + R_{n-1}(x_1, \dots, x_m)y^{n-1} + \dots + R_0(x_1, \dots, x_m).$$

Ukážeme, že na polynóm $R_n(x_1, \dots, x_m)$ môžeme použiť indukčný predpoklad.

Uvažujme polynóm $T(y) = R(0, \dots, 0, y)$ stupňa nanajvýš n. Tento polynóm má n koreňov $y = 1, 2, \dots, n$. Na druhej strane, $T(y)$ nie je konštantný nulový polynóm, lebo $T(0) \neq 0$. Teda $\deg T = n$ a jeho vedúci koeficient $R_n(0, \dots, 0)$ je nenulový.

Ak zoberieme ľubovoľné čísla $a_1, \dots, a_m \in \{0, 1, \dots, n\}$, pričom $a_1 + \dots + a_m > 0$, a dosadíme $x_i = a_i$ do $R(x_1, \dots, x_m, y)$, dostaneme polynóm v premennej y. Tento polynóm je nulový vo všetkých bodoch $y = 0, 1, \dots, n$ (t. j. má aspoň $n + 1$ koreňov) a má stupeň nanajvýš n. Preto musí byť nulový, čiže $R_i(a_1, \dots, a_m) = 0$ pre všetky $i = 0, 1, \dots, n$. Špeciálne máme $R_n(a_1, \dots, a_m) = 0$.

Polynóm $R_n(x_1, \dots, x_m)$ teda spĺňa predpoklady lemy a podľa indukčného predpokladu dostávame $\deg R_n \geqq mn$, odkiaľ

$$\deg P \geqq \deg R \geqq \deg R_n + n \geqq (m+1)n.$$

Teraz už ľahko dokončíme riešenie. Predpokladajme, že máme N rovín pokrývajúcich všetky body z S, ale neobsahujúcich bod $(0, 0, 0)$. Nech všeobecné rovnice týchto rovín sú $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ (pre $i = 1, 2, \dots, N$). Uvažujme polynóm

$$P(x, y, z) = (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) \cdot (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) \cdot \ldots \cdot (a_N x + b_N y + c_N z + d_N),$$

ktorého stupeň je zrejme N. Tento polynóm spĺňa $P(x_0, y_0, z_0) = 0$ pre ľubovoľné $(x_0, y_0, z_0) \in S$ a $P(0, 0, 0) \neq 0$. Podľa dokázanej lemy teda $N = \deg P \geqq 3n$.