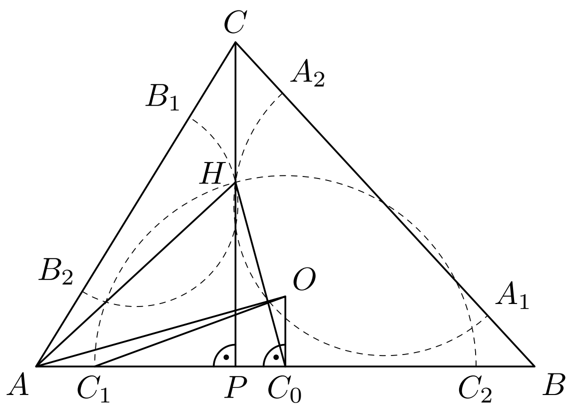
2007/2008
57. ročník Matematickej olympiády *Riešenia úloh IMO*

---

1. *V ostrouhlom trojuholníku ABC označme H priesečník jeho výšok. Kružnica so stredom v strede strany BC prechádzajúca bodom H pretína priamku BC v bodoch A_1 a A_2. Podobne kružnica so stredom v strede strany CA predchádzajúca bodom H pretína priamku CA v bodoch B_1 a B_2 a kružnica so stredom v strede strany AB predchádzajúca bodom H pretína priamku AB v bodoch C_1 a C_2. Dokážte, že body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 ležia na jednej kružnici.* (*Rusko*)

Riešenie. Osi úsečiek A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sú zároveň osami strán BC, CA, AB, takže sa pretínajú v bode O, ktorý je stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC. Preto je O jediný bod, ktorý môže byť stredom požadovanej kružnice. Označme strany a uhly v trojuholníku štandardným spôsobom. Ďalej nech $r = |OA|$ je veľkosť polomeru opísanej kružnice, C_0 je stred strany AB a P päta výšky z vrcholu C (obr. 1). Dokážeme, že všetkých šesť bodov zo zadania má od bodu O rovnakú vzdialenosť. Použitím Pytagorovej vety vo viacerých trojuholníkoch najprv vyjadríme dĺžku úsečky OC_1 pomocou iných dĺžok v trojuholníku.



Obr. 1

Z pravouhlých trojuholníkov OC_1C_0, C_0HP,[1] OAC_0, HAP máme

$$|OC_1|^2 = |C_1C_0|^2 + |OC_0|^2, \tag{1}$$
$$|HC_0|^2 = |HP|^2 + |PC_0|^2, \tag{2}$$
$$|OC_0|^2 = r^2 - (\tfrac{1}{2}c)^2, \tag{3}$$
$$|HP|^2 = |AH|^2 - |AP|^2. \tag{4}$$

Keďže podľa zadania $|C_1C_0| = |HC_0|$, dosadením (2), (3) do (1) a následným dosadením (4) dostávame

$$|OC_1|^2 = |HP|^2 + |PC_0|^2 + r^2 - (\tfrac{1}{2}c)^2 = |AH|^2 - |AP|^2 + |PC_0|^2 + r^2 - \tfrac{1}{4}c^2.$$

Bez ohľadu na to, či bod P leží na úsečke AC_0, alebo na úsečke C_0B, platí

$$|PC_0|^2 = \left|\tfrac{1}{2}c - |AP|\right|^2 = \left(\tfrac{1}{2}c - |AP|\right)^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - c|AP| + |AP|^2.$$

[1] Ak $P = C_0$, tak C_0HP nie je trojuholník, ale rovnosť (2) aj tak triviálne platí.

Dosadením do predošlého vyjadrenia dostaneme

$$|OC_1|^2 = |AH|^2 - |AP|^2 + \left(\tfrac{1}{4}c^2 - c|AP| + |AP|^2\right) + r^2 - \tfrac{1}{4}c^2 = |AH|^2 + r^2 - c|AP|.$$

Napokon, z pravouhlého trojuholníka CAP máme $|AP| = b\cos\alpha$, takže

$$|OC_1|^2 = |AH|^2 + r^2 - cb\cos\alpha.$$

Zrejme zopakovaním totožného postupu (len vymeníme úlohu vrcholov B a C) možno vyjadriť

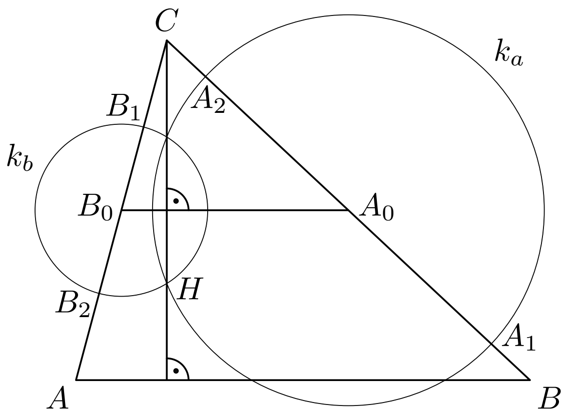
$$|OB_2|^2 = |AH|^2 + r^2 - bc\cos\alpha,$$

takže $|OC_1| = |OB_2|$. Analogicky odvodíme aj rovnosti $|OA_1| = |OC_2|$ a $|OB_1| = |OA_2|$. Spolu s triviálnymi rovnosťami $|OA_1| = |OA_2|$, $|OB_1| = |OB_2|$, $|OC_1| = |OC_2|$ dostávame

$$|OA_1| = |OA_2| = |OB_1| = |OB_2| = |OC_1| = |OC_2|,$$

teda body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 ležia na jednej kružnici so stredom O.

Iné riešenie. Označme stredy strán BC, CA, AB postupne A_0, B_0, C_0 a kružnice spomínané v zadaní so stredmi v týchto bodoch postupne k_a, k_b, k_c. Úsečka A_0B_0 je spojnicou stredov kružníc k_a, k_b. Zároveň je ako stredná priečka trojuholníka ABC rovnobežná so stranou AB a kolmá na priamku CH obsahujúcu výšku na stranu AB. Priamka CH je preto chordálou[2] kružníc k_a, k_b (obr. 2).



Obr. 2

Keďže bod C leží na chordále kružníc k_a, k_b, má ku obom kružniciam rovnakú mocnosť, čiže $|CA_1|\cdot|CA_2| = |CB_1|\cdot|CB_2|$. Z tejto rovnosti a zo známeho „obráteného“ tvrdenia o mocnosti bodu ku kružnici už priamo vyplýva, že body A_1, A_2, B_1, B_2 ležia na jednej kružnici k, bez ohľadu na to, či bod C leží vnútri oboch priemerov A_1A_2, B_1B_2, alebo mimo nich. (Nie je možné, aby ležal vnútri jedného priemeru a mimo druhého, keďže C leží na chordále oboch kružníc. Pri ostrouhlom trojuholníku ABC

[2] Chordála dvoch kružníc je množina bodov, ktoré majú k obom kružniciam rovnakú mocnosť. Je kolmá na spojnicu stredov kružníc a prechádza spoločnými bodmi oboch kružníc, pokiaľ sa tieto pretínajú alebo dotýkajú.

navyše možno ľahko ukázať, že body A_1, A_2, resp. B_1, B_2 ležia vnútri strán BC, CA, takže C leží určite mimo oboch priemerov A_1A_2, B_1B_2).

Stred kružnice k pritom musí byť priesečníkom osí úsečiek A_1A_2, B_1B_2, t. j. stred O opísanej kružnice. Odtiaľ máme $|OA_1| = |OA_2| = |OB_1| = |OB_2|$. Zrejme analogicky (argumentáciou o chordále BH kružníc k_a, k_c) dostaneme $|OA_1| = |OA_2| = |OC_1| = |OC_2|$, odkiaľ dostaneme rovnaký záver ako pri prvom riešení.

---

2. *a) Dokážte, že*

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqq 1$$

pre všetky reálne čísla x, y, z rôzne od 1 spĺňajúce $xyz = 1$.
b) Dokážte, že v uvedenej nerovnosti platí rovnosť pre nekonečne veľa trojíc racionálnych čísel x, y, z rôznych od 1 spĺňajúcich $xyz = 1$. (*Rakúsko*)

Riešenie. a) Zaveďme substitúciu

$$\frac{x}{x-1} = a, \quad \frac{y}{y-1} = b, \quad \frac{z}{z-1} = c, \quad \text{t. j.} \quad x = \frac{a}{a-1}, \quad y = \frac{b}{b-1}, \quad z = \frac{c}{c-1}.$$

Chceme dokázať nerovnosť $a^2+b^2+c^2 \geqq 1$ pre ľubovoľné reálne čísla $a, b, c \neq 1$ spĺňajúce rovnosť

$$\frac{a}{a-1} \cdot \frac{b}{b-1} \cdot \frac{c}{c-1} = 1 \tag{1}$$

pochádzajúcu z podmienky $xyz = 1$. Ekvivalentnými úpravami z (1) dostávame

$$\begin{aligned}
abc &= (a-1)(b-1)(c-1),\\
ab + bc + ca &= a + b + c - 1,\\
(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) &= 2(a+b+c-1),\\
(a+b+c)^2 - 2(a+b+c) &= a^2+b^2+c^2-2,\\
(a+b+c-1)^2 &= a^2+b^2+c^2-1. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Ľavá strana poslednej rovnosti je vždy nezáporná, teda naozaj platí $a^2 + b^2 + c^2 \geqq 1$.

b) Aby sme našli trojice racionálnych čísel $x, y, z \neq 1$ spĺňajúce $xyz = 1$, pre ktoré platí v zadanej nerovnosti rovnosť, stačí nájsť trojice racionálnych čísel $a, b, c \neq 1$ spĺňajúce rovnosti (1) a $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ a použiť uvedenú substitúciu (zachovávajúcu racionálnosť) na výpočet x, y, z. Pritom prvú z rovností sme ekvivalentne upravili na tvar (2). Hľadáme teda v obore racionálnych čísel nekonečne veľa riešení sústavy

$$\begin{aligned}
(a+b+c-1)^2 &= a^2+b^2+c^2-1,\\
a^2+b^2+c^2 &= 1,
\end{aligned}$$

ktorá je zrejme ekvivalentná so sústavou

$$a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c = 1.$$

Vyjadrením $c = 1 - a - b$ a dosadením do rovnice $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ dostávame jedinú rovnicu $a^2 + b^2 + ab - a - b = 0$, ktorú možno v premennej b prepísať ako kvadratickú rovnicu

$$b^2 + (a-1)b + a(a-1) = 0 \tag{3}$$

s diskriminantom

$$D = (a-1)^2 - 4a(a-1) = (1-a)(1+3a).$$

Aby sme dostali racionálnu trojicu (a, b, c), stačí zobrať racionálne číslo a také, že súčin $(1-a)(1+3a)$ bude druhou mocninou racionálneho čísla. Potom totiž budú racionálnymi aj čísla

$$b = \frac{1-a \pm \sqrt{(1-a)(1+3a)}}{2} \qquad \text{a} \qquad c = 1-a-b. \tag{4}$$

Hľadajme a v tvare podielu celých čísel k/m. Potom

$$1-a = \frac{m-k}{m}, \qquad 1+3a = \frac{m+3k}{m}.$$

Vhodnou voľbou teda bude napríklad $m = k^2 - k + 1$, kde k je ľubovoľné celé číslo. Potom zrejme $m \neq 0$, $m-k = (k-1)^2$, $m+3k = (k+1)^2$, čiže $D = (k^2-1)^2/m^2$. Dosadením do (4) (zvolíme napríklad väčší z dvoch koreňov kvadratickej rovnice (3)) dostaneme

$$b = \frac{m-k+k^2-1}{2m} = \frac{m+(m-2)}{2m} = \frac{m-1}{m}, \qquad c = 1 - \frac{k}{m} - \frac{m-1}{m} = \frac{1-k}{m}.$$

Pre rôzne hodnoty k takto zrejme dostaneme nekonečne veľa rôznych racionálnych trojíc (a, b, c), pričom podmienka $a, b, c \neq 1$ vylučuje iba hodnoty $k = 0$ a $k = 1$. Ak by sme sa vrátili k pôvodným premenným x, y, z, po jednoduchej úprave by sme dostali trojice

$$x = -\frac{k}{(k-1)^2}, \qquad y = k - k^2, \qquad z = \frac{k-1}{k^2},$$

avšak dôkaz je úplný aj bez tohto vyjadrenia.

---

3. *Dokážte, že existuje nekonečne veľa kladných celých čísel n takých, že n^2+1 má prvočíselného deliteľa väčšieho ako $2n + \sqrt{2n}$.* (*Litva*)

Riešenie. Nech N je ľubovoľné prirodzené číslo a p je prvočíselný deliteľ čísla N^2+1. Označme z zvyšok, ktorý dáva N po delení prvočíslom p (zrejme $0 < z < p$). Potom máme

$$z^2 \equiv N^2 \equiv -1 \pmod p \qquad \text{a tiež} \qquad (p-z)^2 \equiv z^2 \equiv -1 \pmod p.$$

Zoberme za n menšie z dvojice čísel z, $p-z$. Platí $0 < n \leqq p/2$ a zároveň $p \mid n^2+1$. Navyše

$$(p-2n)^2 \equiv 4n^2 \equiv -4 \pmod p,$$

a keďže $(p-2n)^2 > 0$, dostávame $(p-2n)^2 \geqq p-4$. Podľa doterajšieho $p - 2n \geqq 0$, ak je teda $p \geqq 5$, po odmocnení a úprave máme

$$\begin{aligned} p - 2n &\geqq \sqrt{p-4}, \\ p &\geqq 2n + \sqrt{p-4}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ak $p > 20$, tak $\sqrt{p-4} > 4$ a z (1) vyplýva $p > 2n+4$. Potom $p-4 > 2n$, čiže $\sqrt{p-4} > \sqrt{2n}$ a dosadením do (1) dostávame požadovanú nerovnosť $p > 2n + \sqrt{2n}$.

Ukázali sme, že pre každé prvočíslo $p > 20$, ku ktorému existuje také číslo N, že $p \mid N^2+1$ (teda pre každé prvočíslo, ku ktorému je -1 kvadratickým zvyškom) existuje číslo n s požadovanou vlastnosťou. Ak by bolo takých n len konečne veľa, muselo by existovať iba konečne veľa opísaných prvočísel, platí totiž $p \mid n^2+1$, t. j. $p \leqq n^2 + {}$ $+ 1$. Avšak prvočísel s kvadratickým zvyškom -1 je nekonečne veľa. Dôkazom tohto známeho tvrdenia ukončíme riešenie úlohy.

Nech M je ľubovoľné prirodzené číslo. Potom ľubovoľné prvočíslo p, ktoré je deliteľom čísla $(M!)^2+1$, má medzi kvadratickými zvyškami zvyšok -1. Zároveň $p > M$, lebo zrejme žiadne z čísel 2, 3, ..., M nie je deliteľom čísla $(M!)^2+1$. Ku každému M teda existuje prvočíslo $p > M$ s požadovanou vlastnosťou. Takých prvočísel je preto nekonečne veľa.

---

4. *Nájdite všetky funkcie $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ (t. j. funkcie z kladných reálnych čísel do kladných reálnych čísel) také, že*

$$\frac{f^2(w)+f^2(x)}{f(y^2)+f(z^2)} = \frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

pre všetky kladné reálne čísla w, x, y, z spĺňajúce $wx = yz$. (Južná Kórea)

Riešenie. Predpokladajme, že funkcia f vyhovuje zadaniu. Budeme za w, x, y, z dosadzovať rôzne štvorice kladných čísel spĺňajúce $wx = yz$ a stanovovať tak podmienky, ktoré musí f spĺňať, a ktoré budeme ďalej používať.

Po dosadení $w = x = y = z = 1$ máme $f^2(1)/f(1) = 1$, teda $f(1) = 1$. Zoberme ľubovoľné $t > 0$ a dosaďme $w = t$, $x = 1$, $y = z = \sqrt{t}$. S využitím $f(1) = 1$ postupnými úpravami dostávame

$$\begin{aligned}
\frac{f^2(t)+1}{2f(t)} &= \frac{t^2+1}{2t},\\
tf^2(t)+t &= t^2f(t)+f(t),\\
tf(t)\bigl(f(t)-t\bigr) &= f(t)-t,\\
\bigl(f(t)-t\bigr)\bigl(tf(t)-1\bigr) &= 0.
\end{aligned}$$

Takže pre každé $t > 0$ platí buď $f(t) = t$, alebo $f(t) = 1/t$. Priamym dosadením do zadania možno ľahko overiť, že obe funkcie

$$f(t) = t \quad \text{pre všetky } t > 0 \qquad \text{a} \qquad f(t) = \frac{1}{t} \quad \text{pre všetky } t > 0 \tag{1}$$

vyhovujú (prvá funkcia vyhovuje očividne, pri druhej treba previesť triviálnu úpravu a použiť podmienku $wx = yz$). Ukážeme, že žiadna iná funkcia podmienky zadania nespĺňa, t. j. že f nemôže pre niektoré $t \neq 1$ nadobúdať hodnotu t a pre nejaké iné hodnotu $1/t$.

Predpokladajme, že f nie je ani jedna z funkcií zapísaných v (1). Teda pre nejaké $a, b > 0$ platí $f(a) \neq a$ a $f(b) \neq 1/b$. Podľa odvodených podmienok potom nutne $f(a) =$ $= 1/a$, $f(b) = b$. Dosadením $w = a$, $x = b$, $y = z = \sqrt{ab}$ do zadanej rovnosti a úpravou dostávame

$$\frac{\frac{1}{a^2}+b^2}{2f(ab)} = \frac{a^2+b^2}{2ab},$$

$$f(ab) = \frac{ab(a^{-2}+b^2)}{a^2+b^2}. \tag{2}$$

Vieme, že $f(ab) = ab$ alebo $f(ab) = 1/ab$. Ak $f(ab) = ab$, podľa (2) máme $a^{-2} + b^2 = a^2 + b^2$, odkiaľ $a = 1$. Avšak $f(1) = 1$, čo je v spore s predpokladom $f(a) \neq a$. Podobne ak $f(ab) = 1/ab$, z (2) máme

$$a^2b^2(a^{-2}+b^2) = a^2+b^2, \qquad \text{čiže} \qquad b^2 + a^2b^4 = a^2 + b^2,$$

odkiaľ $b^4 = 1$, t. j. $b = 1$, čo je v spore s predpokladom $f(b) \neq 1/b$.

Dve funkcie zapísané v (1) sú teda jediné vyhovujúce.

---

5. *Nech n a k sú kladné celé čísla, kde $k \geqq n$ a $k-n$ je párne číslo. Daných je $2n$ lámp označených $1, 2, \ldots, 2n$, pričom každá z nich môže byť buď zapnutá alebo vypnutá. Na začiatku sú všetky lampy vypnuté. Uvažujeme postupnosti krokov: v každom kroku jednu z lámp prepneme (zo zapnutej na vypnutú alebo z vypnutej na zapnutú).*

Nech N je počet takých postupností pozostávajúcich z k krokov, ktoré vedú do stavu, že všetky lampy od 1 po n sú zapnuté a všetky lampy od $n+1$ po $2n$ sú vypnuté.

Nech M je počet takých postupností pozostávajúcich z k krokov, ktoré vedú do stavu, že všetky lampy od 1 po n sú zapnuté a všetky lampy od $n+1$ po $2n$ sú vypnuté, pričom žiadna z lámp od $n+1$ po $2n$ nebola nikdy zapnutá.

Určte podiel N/M. (Francúzsko)

Riešenie. Postupnosti, ktoré vedú do stavu opísaného v zadaní (lampy od 1 po n zapnuté, lampy od $n+1$ po $2n$ vypnuté), nazvime *vyhovujúce*. Vyhovujúce postupnosti, v ktorých navyše ani raz nezapneme žiadnu z lámp od $n+1$ po $2n$, nazvime *špeciálne*. Máme teda N vyhovujúcich postupností, z ktorých je M špeciálnych.

V každej vyhovujúcej postupnosti je každá z lámp $1, \ldots, n$ na konci zapnutá, takže bola prepnutá nepárny počet krát. Naopak, každá z lámp $n+1, \ldots, 2n$ je na konci vypnutá, takže bola prepnutá párny počet krát.

Zrejme $M > 0$, t. j. existuje aspoň jedna špeciálna postupnosť (stačí raz zapnúť každú z lámp od 1 po n a potom zvoliť jednu z nich a prepnúť ju $(k-n)$-krát, čo je podľa zadania párne číslo).

Nech $\mathcal{P}$ je ľubovoľná špeciálna postupnosť. Zvoľme ktorúkoľvek lampu l, kde $1 \leqq l \leqq n$. Označme k_l celkový počet prepnutí lampy l (ako sme spomenuli skôr, k_l je nepárne). Vyberme spomedzi nich ľubovoľnú podmnožinu obsahujúcu párne veľa prepnutí a nahraďme ich prepnutím lampy $n+l$. To môžeme urobiť 2^{k_l-1} spôsobmi, keďže každá k_l-prvková množina má 2^{k_l-1} podmnožín s párnou mohutnosťou[3].

[3] Tento známy fakt možno odvodiť jednoduchou kombinatorickou úvahou: Keď vytvárame podmnožinu s párnou mohutnosťou, pri každom spomedzi k_l prvkov sa môžeme rozhodnúť, či do podmnožiny bude alebo nebude patriť, len pri poslednom prvku na výber nemáme – musíme alebo nesmieme ho do podmnožiny pridať, aby sme dodržali paritu. Celkový počet podmnožín je teda

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{(k_l-1)\text{-krát}}\cdot 1 = 2^{k_l-1}.$$

Uvedené zmeny prepnutí môžeme urobiť nezávisle s každou lampou pre $l = 1, \dots, n$. Keďže $k_1 + \dots + k_n = k$, celkový počet rôznych postupností, ktoré dostaneme, je

$$2^{k_1 - 1} \cdot 2^{k_1 - 1} \cdot \ldots \cdot 2^{k_n - 1} = 2^{k-n}.$$

V každej vytvorenej postupnosti je každá z lámp od $n+1$ do $2n$ prepnutá párny počet krát a každá z lámp od 1 do n nepárny počet krát, jedná sa preto o vyhovujúcu postupnosť. Z každej špeciálnej postupnosti $\mathcal{P}$ vieme takto vytvoriť 2^{k-n} vyhovujúcich postupností.

Zrejme každú vyhovujúcu postupnosť $\mathcal{Q}$ možno vytvoriť opísaným spôsobom. Stačí každé prepnutie lampy $l > n$ nachádzajúce sa v $\mathcal{Q}$ nahradiť prepnutím lampy $l - n$. Vo výslednej postupnosti $\mathcal{P}$ nebudú lampy od $n+1$ do $2n$ prepnuté ani raz. Keďže v $\mathcal{Q}$ bola každá lampa $l > n$ prepnutá párny počet krát, každá lampa $l \leqq n$ bude v $\mathcal{P}$ prepnutá nepárny počet krát, t. j. postupnosť $\mathcal{P}$ bude špeciálna. Ak teraz obrátime postup a vrátime príslušné prepnutia naspäť na lampy od $n+1$ do $2n$, dostaneme postupnosť $\mathcal{Q}$. Pritom obrátený postup zmeny $\mathcal{P}$ na $\mathcal{Q}$ prebieha presne tak, ako sme opísali v predošlých odsekoch.

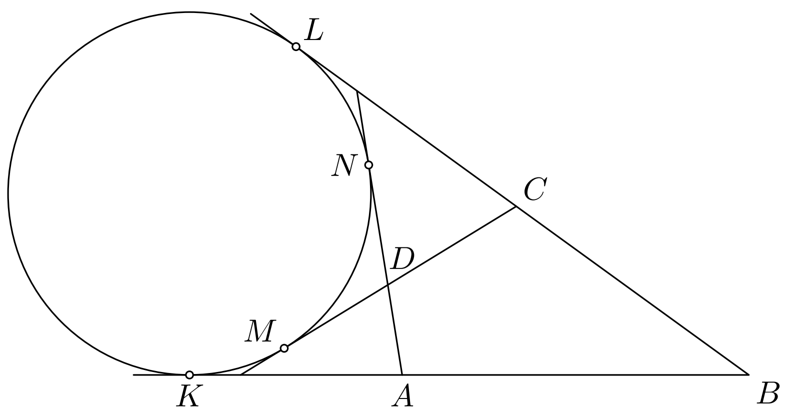
Našli sme zobrazenie z množiny vyhovujúcich postupností do množiny špeciálnych postupností, pričom vzor každej špeciálnej postupnosti pri tomto zobrazení obsahuje 2^{k-n} vyhovujúcich postupností. Preto $N/M = 2^{k-n}$.

---

6. *Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, pričom $|BA| \neq |BC|$. Označme postupne ω_1 a ω_2 kružnice vpísané do trojuholníkov ABC a ADC. Predpokladajme, že existuje kružnica ω dotýkajúca sa polpriamky BA za bodom A a polpriamky BC za bodom C, ktorá sa dotýka aj priamok AD a CD. Dokážte, že spoločné vonkajšie dotyčnice kružníc ω_1 a ω_2 sa pretínajú na kružnici ω.* (*Rusko*)

Riešenie. Pri riešení použijeme dve pomocné lemy, ktoré najprv sformulujeme a dokážeme.

Lema 1. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Ak existuje kružnica, ktorá sa dotýka polpriamky BA za bodom A, polpriamky BC za bodom C a priamok AD a CD, tak $|AB| + |AD| = |CB| + |CD|$.



Obr. 3

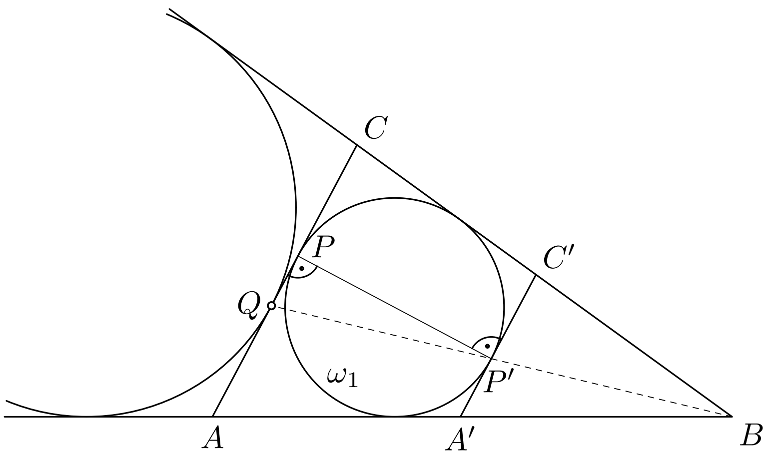
Dôkaz. Označme dotykové body kružnice a priamok AB, BC, CD, DA postupne K,

L, M, N (obr. 3). Máme

$$|AB| + |AD| = (|BK| - |AK|) + (|AN| - |DN|),$$
$$|CB| + |CD| = (|BL| - |CL|) + (|CM| - |DM|).$$

Zrejme $|BK| = |BL|$, $|DN| = |DM|$, $|AK| = |AN|$ a $|CL| = |CM|$ (vzdialenosti bodu od príslušných dotykových bodov na kružnici sú rovnaké). Odtiaľ už priamo dostávame $|AB| + |AD| = |CB| + |CD|$.

Lema 2. V danom trojuholníku ABC označme P bod, v ktorom sa vpísaná kružnica ω_1 dotýka strany AC. Nech PP' je priemer vpísanej kružnice a Q je priesečník priamky BP' so stranou AC. Potom Q je bodom dotyku strany AC a kružnice pripísanej k strane AC.



Obr. 4

Dôkaz. Priesečníky dotyčnice k ω_1 vedenej bodom P' so stranami BA, BC označme postupne A', C' (obr. 4). Kružnica ω_1 je pripísanou kružnicou ku strane $A'C'$ trojuholníka $A'BC'$ a dotýka sa strany $A'C'$ v bode P'. Keďže $A'C' \parallel AC$, v rovnoľahlosti so stredom B a koeficientom $|BQ|/|BP'|$ sa trojuholník $A'BC'$ zobrazí na trojuholník ABC, kružnica ω_1 na kružnicu pripísanú k strane AC trojuholníka ABC a bod P' (ktorý je bodom dotyku ω_1 a strany $A'C'$) na bod Q (ktorý preto musí byť bodom dotyku pripísanej kružnice a strany AC).

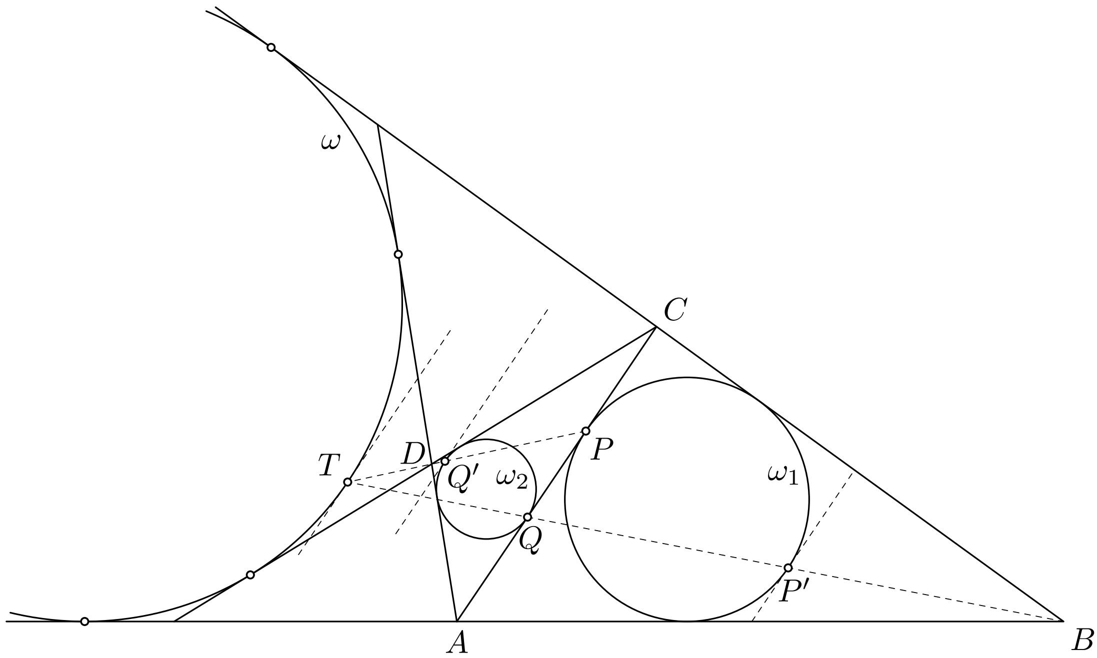
Pripomeňme ešte známy fakt, že ak sa v trojuholníku ABC dotýka vpísaná kružnica strany AC v bode P a pripísaná kružnica k tejto strane sa jej dotýka v bode Q, tak $|AP| = |CQ|$.

Vráťme sa k pôvodnému zadaniu. Nech ω_1 sa dotýka uhlopriečky AC v bode P a ω_2 v bode Q. Podľa známych vzorcov pre dĺžky úsekov medzi vrcholmi trojuholníka a dotykovými bodmi strán a vpísanej kružnice dostávame

$$|AP| = \tfrac{1}{2}(|AC| + |AB| - |BC|), \qquad |CQ| = \tfrac{1}{2}(|AC| + |CD| - |AD|).$$

Keďže z prvej lemy vyplýva $|AB| - |BC| = |CD| - |AD|$, dostávame $|AP| = |CQ|$. Preto Q je zároveň bodom dotyku kružnice pripísanej k strane AC trojuholníka ABC. Analogicky P je bodom dotyku kružnice pripísanej k strane AC trojuholníka ADC. Navyše $P \neq Q$, lebo $|AB| \neq |BC|$.

Nech PP', QQ' sú priemery kružníc ω_1, ω_2 kolmé na uhlopriečku AC (obr. 5). Podľa druhej lemy ležia body B, P', Q na jednej priamke. Takisto ležia na jednej priamke body D, Q', P.



Obr. 5

Uvažujme priemer kružnice ω, ktorý je kolmý na AC. Nech T je ten jeho krajný bod, ktorý je bližšie k AC. V rovnoľahlosti so stredom B a koeficientom $|BT|/|BP'|$ sa ω_1 zobrazí na ω, preto body B, P', T ležia na jednej priamke. Podobne sa v rovnoľahlosti so stredom D a koeficientom $-|DT|/|DQ'|$ zobrazí ω_2 na ω a na jednej priamke ležia body D, Q', T.

Takže bod T je priesečníkom priamok $P'Q$ a PQ'. Keďže $PP' \parallel QQ'$, kružnice ω_1, ω_2 s priemermi PP', QQ' sú rovnoľahlé so stredom T. Pritom koeficient tejto rovnoľahlosti je očividne kladný (lebo T neleží na spoločnej vnútornej dotyčnici AC oboch kružníc), teda T je zároveň priesečníkom vonkajších dotyčníc kružníc ω_1, ω_2, čo sme chceli dokázať.