2007/2008
57. ročník Matematickej olympiády *Riešenia úloh MEMO*

I1. *Nech* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je rastúca postupnosť celých kladných čísel s nasledovnou vlastnosťou: pre každú štvoricu indexov* (i, j, k, l), *kde* $1 \leqq i < j \leqq k < l$ *a* $i+l = j+k$, *platí nerovnosť* $a_i + a_l > a_j + a_k$. *Určte najmenšiu možnú hodnotu čísla* a_{2008}. (Rakúsko)

Riešenie. (Podľa *Jaromíra Šimšu, Česká republika.*) Pre každé $n \geqq 1$ a štvoricu indexov $(n, n+1, n+1, n+2)$ podľa zadania platí

$$a_{n+2} - a_{n+1} \geqq (a_{n+1} - a_n) + 1.$$

Keďže $a_2 - a_1 \geqq 1$, jednoduchým dôkazom matematickou indukciou dostávame $a_{n+1} - a_n \geqq n$ pre $n \geqq 1$. Takže $a_{n+1} \geqq n + a_n$. Z toho s využitím $a_1 \geqq 1$ opäť triviálnou matematickou indukciou odvodíme nerovnosť

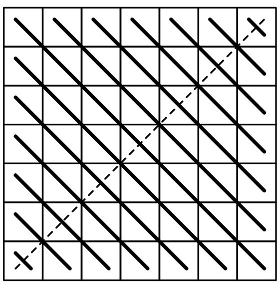
$$a_n \geqq \frac{1}{2}(n^2 - n + 2).$$

Pritom postupnosť $a_n = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ spĺňa podmienky zadania. Nerovnosť $a_i + a_l > a_j + a_k$ je totiž pre ňu (pri rovnosti $i + l = j + k$) ekvivalentná s nerovnosťou $i^2 + l^2 > j^2 + k^2$, ktorá po substitúcii $i = d - y$, $l = d + y$, $j = d - x$, $k = d + x$ (kde $0 \leqq x < y$) prejde na zrejmú nerovnosť $2d^2 + 2y^2 > 2d^2 + 2x^2$.

Záver. Najmenšia možná hodnota čísla a_{2008} je $\frac{1}{2}(2008^2 - 2008 + 2) = 2\,015\,029$.

I2. *Uvažujme šachovnicu* $n \times n$, *kde* $n > 1$. *Koľkými spôsobmi môžeme vybrať* $2n - 2$ *políčok tejto šachovnice tak, aby spojnica stredov žiadnych dvoch vybraných políčok nebola rovnobežná so žiadnou diagonálou šachovnice?* (Švajčiarsko)

Riešenie. Množinu k políčok uložených od jedného okraja šachovnice po druhý v smere niektorej uhlopriečky (pričom $1 \leqq k \leqq n$) nazývajme k-diagonála. Počet disjunktných diagonál v jednom smere je $2n - 1$ (obr. 1), medzi $2n - 2$ zvolenými políčkami však nemôžu byť naraz obe políčka na 1-diagonálach (keďže tie sú obe súčasťou n-diagonály majúcej druhý smer). Preto na každej k-diagonále pre $k > 1$ musí byť zvolené práve jedno políčko a práve dve políčka musia byť zvolené v rohoch (nie však protiľahlých).



Obr. 1

Uvažujme množinu P všetkých takých dvojíc (z, v), že z je zvolené políčko a v je *voľné* (čiže nezvolené) políčko na rovnakej diagonále ako z. Na šachovnici je práve $n^2 - 2n + 2$ voľných políčok, pričom dve z nich sú rohové. Každé zo zvyšných $n^2 - 2n$

voľných políčok v leží na dvoch k-diagonálach pre $k > 1$, existujú k nemu preto práve dve políčka z také, že $(z, v) \in P$. Celkový počet p dvojíc v množine P je teda

$$p = 2(n^2 - 2n) + 2 = 2n^2 - 4n + 2, \tag{1}$$

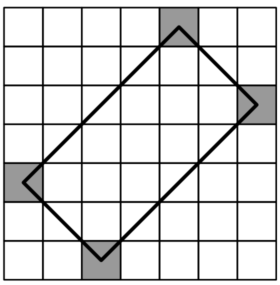
pričom $+2$ je príspevok dvoch voľných rohových políčok (každé z nich má jediné príslušné zvolené políčko v protiľahlom rohu).

Ak zvolené políčko z leží na prieniku k_1-diagonály a k_2-diagonály pre $k_1, k_2 > 1$, tak počet počet voľných políčok v takých, že $(z, v) \in P$, je rovný $k_1 + k_2 - 2$. To isté platí aj pre rohové políčka, pre ktoré $\{k_1, k_2\} = \{1, n\}$. Zrejme pre každé zvolené políčko z platí $k_1 + k_2 \geqq n + 1$, pričom rovnosť platí práve vtedy, keď sa políčko nachádza na okraji šachovnice. Takže počet takých voľných políčok v, že $(z, v) \in P$, je aspoň $n - 1$. Odtiaľ

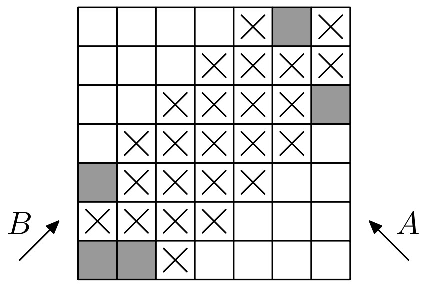
$$p \geqq (2n - 2)(n - 1) = 2n^2 - 4n + 2.$$

Podľa (1) vieme, že v predošlej nerovnosti platí rovnosť, preto všetky zvolené políčka musia ležať na okraji šachovnice.

Ak zvolíme ľubovoľné políčka (napríklad aj žiadne) z prvého riadka šachovnice, zvyšné okrajové políčka (ležiace mimo prvého riadka), ktoré musíme zvoliť, sú jednoznačne určené. Pre rohové políčka je to zrejmé, pre ostatné políčka stačí pre každé $k = 2, 3, \ldots, n - 1$ uvažovať obdĺžnik tvorený dvoma k-diagonálami v jednom smere a $(n + 1 - k)$-diagonálami v druhom smere (v každom takom obdĺžniku musia byť medzi zvolenými políčkami dva protiľahlé rohy, obr. 2). Celkový počet rôznych výberov políčok je teda rovnaký, ako počet rôznych podmnožín n-prvkovej množiny (tvorenej políčkami prvého riadka), čiže 2^n.



Obr. 2



Obr. 3

Iné riešenie. (Podľa *Bernda Mulanskeho*, *Nemecko*.) Dva rôzne smery diagonál označme A a B. Z úvodu prvého riešenia vieme, že na každej k-diagonále pre $k >$ > 1 je zvolené práve jedno políčko a práve dve políčka sú zvolené v neprotiľahlých rohoch. Každý vyhovujúci výber políčok môžeme vytvoriť nasledujúcim postupom pozostávajúcim z n krokov:

- ▷ Krok 1: Zvolíme políčko na jednej z dvoch 1-diagonál smeru A.
- ▷ Krok k ($2 \leqq k \leqq n - 1$): Zvolíme dve políčka, každé na jednej z dvoch k-diagonál smeru A.
- ▷ Krok n: Zvolíme políčko na n-diagonále smeru A.

Zrejme pre každé $m = 1, 2, \ldots, n - 1$ po urobení m krokov (takých, že žiadne dve zvolené políčka nie sú na rovnakej diagonále smeru B) sa na každej spomedzi $2m - 1$

najdlhších k-diagonál smeru B (t. j. $k \geqq n+1-m$) nachádza zvolené políčko (obr. 3). Ak $m < n-1$, v nasledujúcom kroku $m+1$ musia byť obe políčka zvolené na kraji oboch $(m+1)$-diagonál smeru A (ostatné políčka týchto dvoch diagonál ležia na už „obsadených“ diagonálach smeru B), čo možno urobiť práve dvoma spôsobmi. Podobne je to v prípade $m+1=n$. Máme teda dve možnosti v každom z n krokov a celkový počet rôznych vyhovujúcich výberov je 2^n.

Iné riešenie. (Podľa *Pavla Novotného*, *Slovensko*.) Ofarbime políčka šachovnice ako zvyčajne, pričom ľavý horný roh bude čierny. Z podobnej úvahy ako v úvode prvého riešenia vyplýva, že musíme zvoliť $n-1$ bielych a $n-1$ čiernych políčok. Počet p_n všetkých vyhovujúcich výberov $2n-2$ políčok na šachovnici $n \times n$ sa rovná súčinu $b_n \cdot c_n$, pričom b_n a c_n sú počty vyhovujúcich výberov $n-1$ bielych, resp. čiernych políčok. Zrejme $b_2 = b_3 = 2$, $c_2 = 2$ a $c_3 = 4$. Ľahko možno ukázať, že pre každé $n \geqq 4$ platí $b_n = 2b_{n-2}$,[1] $c_n = 2b_{n-1}$,[2] takže $p_n = b_n c_n = 4b_{n-2}b_{n-1} = 2c_{n-1}b_{n-1} = 2p_{n-1}$, odkiaľ už triviálne vyplýva $p_n = 2^n$.

I3. *Nech ABC je rovnoramenný trojuholník s ramenami AC a BC. Kružnica vpísaná tomuto trojuholníku sa dotýka strany AB v bode D a strany BC v bode E. Priamka rôzna od AE prechádza bodom A a pretína vpísanú kružnicu v bodoch F a G. Priamky EF a EG pretínajú priamku AB v bodoch K a L. Dokážte, že platí rovnosť $|DK| = |DL|$.* (*Maďarsko*)

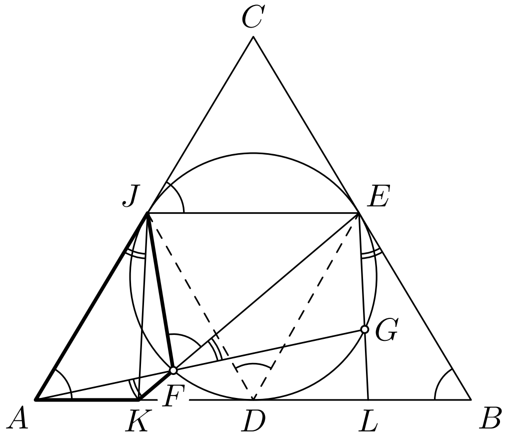
Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $|AF| < |AG|$. Rozoberme najprv situáciu, keď G je na kratšom oblúku DE.

Označme J dotykový bod vpísanej kružnice so stranou AC. Z vlastností súhlasných, úsekového a obvodových uhlov máme $|\measuredangle CAB| = |\measuredangle CJE| = |\measuredangle JDE| = |\measuredangle JFE|$ (obr. 4), takže $AJFK$ je tetivový štvoruholník. Preto z obvodových, vrcholových a úsekového uhla dostávame $|\measuredangle AJK| = |\measuredangle AFK| = |\measuredangle EFG| = |\measuredangle LEB|$, teda trojuholníky AJK a BEL sú zhodné. Keďže K a L sú vnútorné body úsečky AB, z rovnosti $|AK| = |BL|$ vyplýva $|DK| = |DL|$.

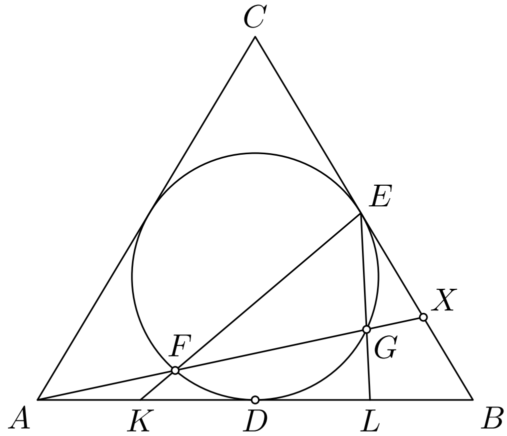
Ak G leží na dlhšom oblúku DE (medzi bodmi E a J), tak K, A, B, L ležia v tomto poradí na priamke a tetivovým štvoruholníkom je $AKJF$. Ostatné argumenty sú rovnaké ako v predošlom prípade.

[1] Odstránime dve biele 2-diagonály v jednom smere a dve biele $(n-1)$-diagonály v druhom smere; zvyšné biele políčka vytvárajú rovnaké diagonály ako biele políčka šachovnice $(n-2) \times (n-2)$.

[2] Odstránime jednu čiernu n-diagonálu; zvyšné čierne políčka vytvárajú rovnaké diagonály ako biele políčka šachovnice $(n-1) \times (n-1)$.



Obr. 4



Obr. 5

Iné riešenie. (Podľa *Tomáša Pavlíka, Česká republika.*) Označme X priesečník priamky AF so stranou BC (obr. 5). Z mocnosti bodu X ku vpísanej kružnici platí $|XE|^2 = |XF| \cdot |XG|$, čiže

$$\frac{|XG|}{|XE|} = \frac{|XE|}{|XF|}. \tag{1}$$

Podľa Menelaovej vety pre trojuholník ABX a priamky EG a EF máme

$$\frac{|AL|}{|LB|} \cdot \frac{|BE|}{|EX|} \cdot \frac{|XG|}{|GA|} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{|AK|}{|KB|} \cdot \frac{|BE|}{|EX|} \cdot \frac{|XF|}{|FA|} = 1.$$

Použitím (1) môžeme tieto dve rovnosti prepísať na

$$\frac{|XE|}{|XF|} \cdot \frac{|AL| \cdot |BE|}{|LB| \cdot |GA|} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{|XE|}{|XF|} \cdot \frac{|KB| \cdot |FA|}{|AK| \cdot |BE|} = 1.$$

Odtiaľ postupne

$$\frac{|AL| \cdot |BE|}{|LB| \cdot |GA|} = \frac{|KB| \cdot |FA|}{|AK| \cdot |BE|},$$

$$\frac{|AK| \cdot |AL| \cdot |BE|^2}{|KB| \cdot |LB| \cdot |FA| \cdot |GA|} = 1. \tag{2}$$

Z mocnosti bodu A ku vpísanej kružnici platí $|AF| \cdot |AG| = |AD|^2$, odkiaľ spolu so zrejmými rovnosťami $|AD| = |BD| = |BE|$ máme $|AF| \cdot |AG| = |BE|^2$. Spojením s (2) dostávame

$$|AK| \cdot |AL| = |KB| \cdot |LB|.$$

V závislosti od polohy bodu G ležia body K a L buď oba vnútri, alebo mimo úsečky AB. Podľa toho pre niektoré znamienko plus alebo mínus platí

$$|AK| \cdot (|AB| \pm |BL|) = |AK| \cdot |AL| = |KB| \cdot |LB| = (|AB| \pm |AK|) \cdot |BL|.$$

V oboch prípadoch po úprave $|AK| = |BL|$, čo je ekvivalentné s rovnosťou $|DK| = |DL|$.

I4. *Nájdite všetky také celé čísla k, že čísla $4n+1$ a $kn+1$ sú nesúdeliteľné pre každé celé číslo n.* (*Maďarsko*)

Riešenie. Keďže číslo $4n+1$ je nepárne, z rovnosti $k-4 = k(4n+1) - 4(kn+1)$ vidíme, že $4n+1$ a $kn+1$ sú nesúdeliteľné, ak $k-4$ nemá žiadneho nepárneho deliteľa $p > 1$, t. j. keď $k - 4 = \pm 2^m$ pre nejaké nezáporné celé číslo m.

Na druhej strane, ak $k-4$ má nepárneho deliteľa $p > 1$, ľahko nájdeme násobok p tvaru $4n+1$ (je ním napríklad číslo p^2 alebo jednoducho jedno z dvojice čísel p, $3p$). Pre každé číslo $4n+1$, ktoré je násobkom p, z rovnosti uvedenej na začiatku riešenia vyplýva $p \mid kn+1$, teda $4n+1$ a $kn+1$ nie sú nesúdeliteľné.

Odpoveď. Hľadanými číslami sú $k = 4 \pm 2^m$, pričom $m = 0, 1, 2, \ldots$

T1. *Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pre ktoré platí*

$$xf(x+xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$$

pre všetky reálne čísla x, y. (*Švajčiarsko*)

Riešenie. Dosadením $x = y = 0$ do zadanej rovnosti

$$xf(x+xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$$

dostaneme $f(0) = 0$. Po dosadení $y = -1$ do zadanej rovnosti tak máme

$$xf(x) + f(x^2)f(-1) = 0. \tag{1}$$

Rozoberme postupne prípady $f(-1) = 0$ a $f(-1) \neq 0$.

Prípad $f(-1) = 0$. Z (1) potom vyplýva $f(x) = 0$ pre všetky $x \neq 0$. Keďže už vieme, že aj $f(0) = 0$, dostávame konštantnú nulovú funkciu $f(x) = 0$, ktorá očividne vyhovuje.

Prípad $f(-1) \neq 0$. Dosadením $x = -1$ do (1) dostávame $f(1) = 1$. S využitím toho po dosadení $x = 1$ do (1) máme $f(-1) = -1$ a teda (1) môžeme prepísať na

$$xf(x) = f(x^2). \tag{2}$$

Dosaďme teraz do zadanej rovnosti $y = x - 1$. Odtiaľ

$$xf(x^2) = xf(x) + f(x^2)f(x-1). \tag{3}$$

Sčítaním (2) a (3) získame po úprave rovnosť

$$f(x^2)(f(x-1) - (x-1)) = 0. \tag{4}$$

Predpokladajme, že $f(a) = 0$ pre nejaké $a \neq 0$. Potom podľa (2) máme $f(a^2) = 0$ a teda po dosadení $x = a$ do zadanej rovnosti dostaneme $af(a+ay) = 0$, čiže $f(a+ay) = 0$. Keďže y môže byť ľubovoľné, nutne aj $f(-1) = 0$, čo nesúhlasí s prípadom, ktorý rozoberáme. Preto pre každé $x \neq 0$ platí $f(x) \neq 0$ a takisto aj $f(x^2) \neq 0$. Z (4) potom $f(x-1) = x-1$ pre každé $x \neq 0$, takže $f(x) = x$ pre každé $x \neq -1$. Keďže z predošlého vieme, že aj $f(-1) = -1$, dostávame funkciu $f(x) = x$, ktorá tiež očividne vyhovuje.

Záver. Hľadanými funkciami sú $f(x) = 0$ a $f(x) = x$.

T2. *Na tabuli je napísaných n celých kladných čísel, pričom $n \geqq 2$. V jednom kroku vyberieme dve z napísaných čísel a každé z nich nahradíme ich súčtom. Určte všetky hodnoty n, pre ktoré môžeme z akejkoľvek začiatočnej n-tice prirodzených čísel po konečnom počte krokov dostať n-ticu rovnakých čísel.* (Slovensko, Peter Novotný)

Riešenie. Ak začneme s n-ticou $(2, 2, 1, 1, \ldots, 1)$, pričom $n \geqq 3$, v každej n-tici, ktorú z nej po ľubovoľnom počte krokov dostaneme, bude počet členov nadobúdajúcich maximálnu hodnotu *párny*. Preto nevyhovuje žiadna nepárna hodnota $n \geqq 3$.

Matematickou indukciou dokážeme, že každé párne $n \geqq 2$ vyhovuje. Pre $n = 2$ je to zrejmé. Ak $n \geqq 4$ je párne, podľa indukčného predpokladu vieme ľubovoľnú n-ticu po konečnom počte krokov zmeniť na $(a, a, \ldots, a, b, b)$. Ak $a \neq b$, opakovane urobíme niektorú z nasledujúcich sérií krokov, ktoré vždy vedú na n-ticu tvaru

$$(\underbrace{a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-k})$$

(v nej k môže mať inú hodnotu ako počiatočné $k = n - 2$, stále však bude *párne*):

$$\begin{aligned}
\text{séria } \alpha\text{:} \quad & (\underbrace{a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-k}) \to (\underbrace{2a, \ldots, 2a}_{k}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-k}),\\
\text{séria } \beta\text{:} \quad & (\underbrace{a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-k}) \to (\underbrace{a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{2b, \ldots, 2b}_{n-k}),\\
\text{séria } \gamma_1 \text{ (ak } k \leqq n-k\text{):} \quad & (\underbrace{a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-k}) \to (\underbrace{a+b, \ldots, a+b}_{2k}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-2k}),\\
\text{séria } \gamma_2 \text{ (ak } k \geqq n-k\text{):} \quad & (\underbrace{a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-k}) \to (\underbrace{a, \ldots, a}_{2k-n}, \underbrace{a+b, \ldots, a+b}_{2(n-k)}).
\end{aligned}$$

Kvôli ďalším úvahám zaveďme označenie $c = 2^{P(c)} N(c)$ pre ľubovoľné prirodzené číslo c, pričom $P(c) \geqq 0$ a $N(c)$ je nepárne. Na n-ticu

$$(\underbrace{a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-k})$$

pričom $a \neq b$, použijeme
- ▷ sériu α, ak $P(a) < P(b)$,
- ▷ sériu β, ak $P(a) > P(b)$,
- ▷ sériu γ_1 alebo γ_2, ak $P(a) = P(b)$ (a teda $N(a) \neq N(b)$).

Pri použití sérií α a β sa čísla $N(a)$, $N(b)$ nemenia, zatiaľ čo pri použití γ_1 a γ_2 sa zmení práve jedno z nich, konkrétne

$$N(b) \to \frac{N(a) + N(b)}{2^m}, \quad \text{alebo} \quad N(b) \to \frac{N(a) + N(b)}{2^m},$$

pričom $m = P(N(a) + N(b)) \geqq 1$ a teda

$$\frac{N(a) + N(b)}{2^m} \leqq \frac{N(a) + N(b)}{2} < \max(N(a), N(b))$$

(pripomíname, že $N(a) \neq N(b)$). Z uvedeného vyplýva, že hodnota $\max(N(a), N(b))$ nikdy nerastie, teda po konečnom počte krokov musí byť konštantná. Od toho momentu musíme mať stále buď $N(a) \geqq N(b)$, alebo $N(a) \leqq N(b)$. To vylučuje z ďalšieho použitia buď sériu γ_1, alebo sériu γ_2. Všetky ďalšie zmeny parametra k sú potom buď $k \to 2k$, alebo $(n-k) \to 2(n-k)$. Keďže toto možno zopakovať iba r-krát, kde $2^r \leqq n$, na konci musíme dostať n-ticu $(a, \dots, a, b, \dots, b)$, ktorú (ak $a \neq b$) už môžeme meniť len sériami α a β. Použitím série α alebo β práve $|P(a) - P(b)|$-krát dostaneme n-ticu $(a', \dots, a', b', \dots, b')$, v ktorej $P(a') = P(b')$. Keďže použitie γ_1, γ_2 sme už vylúčili, nutne $a' = b'$, čím je indukčný krok ukončený.

Iné riešenie. (Podľa *nemeckého družstva*, upravené.) Dokážeme *bez* matematickej indukcie vzhľadom na n, že vyhovuje každé párne $n = 2k$. Najskôr v začiatočnej $2k$-tici $(a_1, \dots, a_{2k})$ nahradíme každú dvojicu (a_{2i-1}, a_{2i}) (pre $i = 1, \dots, k$) dvojicou $(a_{2i-1} + a_{2i}, a_{2i-1} + a_{2i})$. Odteraz budeme mať na $(2i-1)$-tej a $2i$-tej pozícii vždy rovnaké čísla. Preto kvôli prehľadnosti budeme pracovať s k-ticami $(x, y, z, \dots)$ namiesto $2k$-tic $(x, x, y, y, z, z, \dots)$. S k-ticami môžeme robiť nasledujúce zmeny:

- ▷ zvolíme dve čísla x, y a nahradíme každé z nich ich súčtom (to zodpovedá dvom krokom $(\dots, x, x, \dots, y, y, \dots) \to (\dots, x+y, x, \dots, x+y, y, \dots) \to (\dots, x+y, x+y, \dots, x+y, x+y, \dots)$ vykonaných na $2k$-tici);
- ▷ zvolíme jedno číslo x a vynásobíme ho dvoma (to zodpovedá jednému kroku $(\dots, x, x, \dots) \to (\dots, x+x, x+x, \dots)$;
- ▷ predelíme všetky čísla dvoma (to samozrejme nič neovplyvní; formálne si môžeme pamätať, koľkokrát sme delenie dvoma vykonali a na konci môžeme všetky čísla vynásobiť príslušnou mocninou dvoch).

Naším cieľom je dostať k rovnakých čísel. Získame ich opakovaním nasledovného algoritmu:

1. Kým existujú aspoň dve nepárne čísla, nájdeme najmenšie a najväčšie nepárne číslo a nahradíme každé z nich ich (párnym) súčtom.
2. Ak po skončení prvého kroku je v k-tici jedno nepárne číslo, vynásobíme ho dvoma.
3. Vydelíme všetky čísla dvoma.

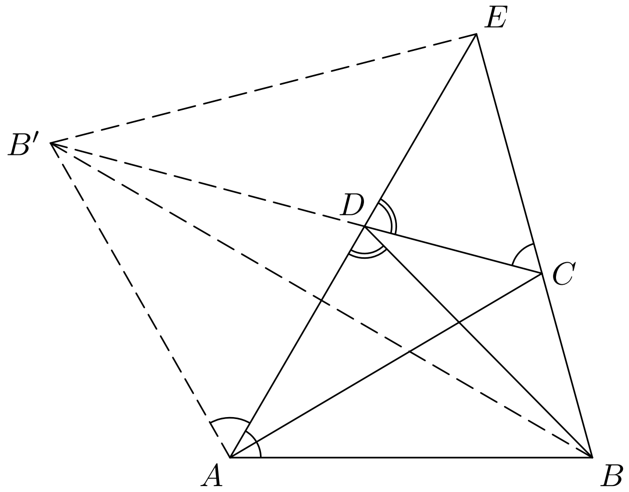
Zrejme po každom vykonaní celého algoritmu sa najväčšie číslo spomedzi všetkých k čísel buď zmenší, alebo nezmení. Keďže toto maximum je stále prirodzeným číslom, po konečnom počte opakovaní algoritmu musí nadobudnúť hodnotu M, ktorá sa už nebude meniť. Od tohto momentu sledujme počet čísel majúcich hodnotu M v našej k-tici. Tento počet označme N.

Zrejme M je nepárne (inak by sa v treťom kroku algoritmu zmenšilo). Ak $N < k$, tak v k-tici existuje aspoň jedno číslo m menšie ako M. Ak m je nepárne, po vykonaní algoritmu sa N zmenší. Keďže N sa nemôže nikdy zväčšiť, po konečnom počte krokov už musí ostať konštantné a všetky čísla v k-tici menšie ako M musia byť párne. Ale každé párne m sa po vykonaní algoritmu vydelí dvoma a po niekoľkých vykonaniach algoritmu sa nutne objaví nepárne číslo menšie ako M. Preto v k-tici neexistujú čísla menšie ako M, čo sme chceli dokázať.

T3. *Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Bod E leží v opačnej polrovine s hraničnou priamkou AC ako bod B a D je vnútorný bod úsečky AE. Nech $|\angle ADB| = |\angle CDE|$, $|\angle BAD| = |\angle ECD|$ a $|\angle ACB| = |\angle EBA|$. Dokážte, že body B, C a E sú kolineárne.*

(*Slovinsko*)

Riešenie. Podmienka $|\angle ADB| = |\angle CDE|$ nabáda zobraziť bod B v osovej súmernosti podľa priamky AE do bodu B' (obr. 6). Potom ležia body C, D a B' na jednej priamke a $|\angle EAB'| = |\angle EAB| = |\angle ECD| = |\angle ECB'|$, takže $B'ACE$ je tetivový štvoruholník. Odtiaľ $|\angle ECA| = 180° - |\angle EB'A| = 180° - |\angle EBA| = 180° - |\angle ACB|$, čiže $|\angle ECA| + |\angle ACB| = 180°$ a teda body B, C, E ležia na jednej priamke.



Obr. 6

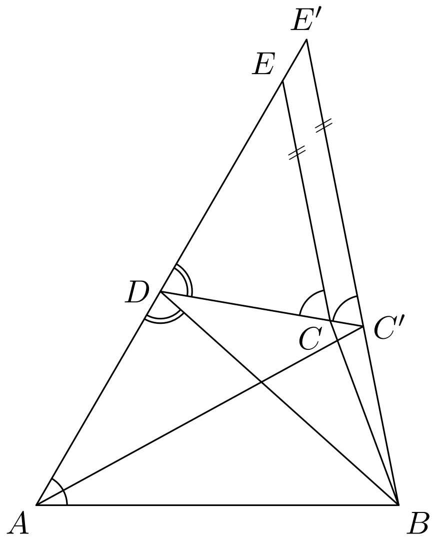
Poznámky. Rovnako dobre môžeme zobraziť C v osovej súmernosti podľa AE do C' ležiaceho na jednej priamke s B, D. Tetivový je potom štvoruholník $ABEC'$ a ďalej $|\angle ECA| = |\angle EC'A| = 180° - |\angle EBA| = 180° - |\angle ACB|$, t. j. opäť $|\angle ECA| + |\angle ACB| = 180°$.

Kvôli dokázanej kolineárnosti bodov B, C, E z podmienky $|\angle ACB| = |\angle EBA|$ vyplýva $|AB| = |AC|$, zatiaľ čo z podmienky $|\angle BAD| = |\angle ECD|$ vyplýva, že štvoruholník $ABCD$ je tetivový. To naznačuje, ako možno úlohu riešiť iným spôsobom. Predtým ešte poznamenajme, že rozloženie bodov opísané v zadaní *môže* nastať a všetky také rozloženia sú tohto typu: ABC je rovnoramenný trojuholník, pričom $|AB| = |AC|$, body B, C, E ležia na jednej priamke (C medzi B a E) a AE pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode D.

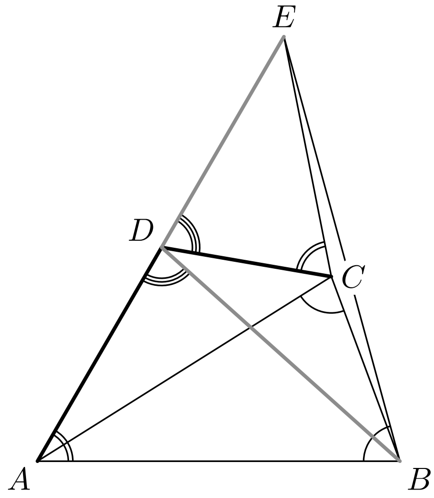
Iné riešenie. Predpokladajme, že B, C, E nie sú kolineárne. Priamka prechádzajúca cez B rovnobežná s CE pretína priamky CD a AD postupne v bodoch C' a E'. Keďže $|\angle E'C'D| = |\angle ECD| = |\angle BAD|$, štvoruholník $ABC'D$ je tetivový (obr. 7). Označme $\mathcal{K}$ jemu opísanú kružnicu. Máme $|\angle AC'B| = |\angle ADB| = |\angle CDE| = |\angle C'DE| = |\angle ABC'|$, t. j. $|\angle AC'B| = |\angle ABC'|$ (teda ABC' je rovnoramenný trojuholník).

Predpokladajme, že C leží vnútri úsečky $C'D$. Potom C leží vnútri $\mathcal{K}$ (v rovnakej polrovine určenej priamkou AB ako bod C'), preto $|\angle ACB| > |\angle AC'B| = |\angle ABC'| = |\angle ABE'| > |\angle ABE|$ (lebo E leží medzi A a E'), čo je v spore s $|\angle ACB| = |\angle EBA|$.

Podobne ak C neleží na úsečke $C'D$, tak C leží zvonka $\mathcal{K}$ (v rovnakej polrovine určenej priamkou AB ako bod C'), preto $|\angle ACB| < |\angle AC'B| = |\angle ABC'| = |\angle ABE'| < |\angle ABE|$ (lebo E' leží medzi A a E), čo je opäť v spore s $|\angle ACB| = |\angle EBA|$.



Obr. 7



Obr. 8

Iné riešenie. (Podľa *Karla Horáka, Česká republika.*) Z daných rovností veľkostí uhlov vyplýva, že trojuholníky ABD a CED sú podobné (obr. 8). Z toho okamžite dostávame, že aj trojuholníky ACD a BED sú podobné (podľa *sus*; rovnako veľký uhol pri spoločnom vrchole D a úmerné strany). Z rovnosti uhlov BED a ACD potom vyplýva, že súčet veľkostí troch uhlov BCA, ACD a DCE je rovný súčtu veľkostí uhlov v trojuholníku ABE, teda E, C a B sú kolineárne.

T4. *Nech súčet všetkých kladných deliteľov celého kladného čísla n je mocninou čísla 2. Dokážte, že aj počet týchto deliteľov je mocninou čísla 2.* (Česká rep.)

Riešenie. Nech prvočíselný rozklad čísla n je $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}$, pričom $p_1, \dots, p_k$ sú rôzne prvočísla a $s_i \geqq 1$ pre každé i. Predpokladajme, že súčet všetkých kladných deliteľov čísla n, ktorý možno vypočítať ako

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{s_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{s_2}) \dots (1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{s_k}),$$

je mocninou dvoch. Potom každý z činiteľov

$$f_i = 1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{s_i}$$

musí byť tiež mocninou dvoch väčšou ako 1 a teda p_i aj s_i sú nepárne. Ak $s_i > 1$, tak

$$f_i = (1 + p_i)(1 + p_i^2 + p_i^4 + \dots + p_i^{s_i - 1}).$$

Keďže f_i nemá žiadneho nepárneho deliteľa väčšieho ako 1, nepárne celé číslo $s_i - 1$ (o ktorom predpokladáme, že je kladné) musí byť tvaru $4k + 2$ a preto vieme urobiť ďalší rozklad

$$f_i = (1 + p_i)(1 + p_i^2)(1 + p_i^4 + p_i^8 + \dots + p_i^{s_i - 3}).$$

Obe čísla $1+p_i$ a $1+p_i^2$ sú mocniny dvoch, teda $1+p_i \mid 1+p_i^2$, čo je v spore s rovnosťou $1+p_i^2=(1+p_i)(p_i-1)+2$ (keďže zrejme $1+p_i \nmid 2$). Preto pre každé i platí $s_i=1$ a počet deliteľov čísla n je rovný 2^k.

Poznámka. Uvedené riešenie možno ukončiť aj bez pozorovania, že $1+p_i$ a $1+ p_i^2$ nemôžu byť súčasne mocniny dvoch. Opakovaním postupných rozkladov na súčin dostaneme

$$f_i=(1+p_i)\bigl(1+p_i^2\bigr)\bigl(1+p_i^4\bigr)\dots\bigl(1+p_i^{2^{t_i}}\bigr),$$

takže $s_i=2^{t_i+1}-1$ pre nejaké $t_i \geqq 0$ a pre každé i a teda počet deliteľov čísla n je rovný $2^{k+t_1+t_2+\dots+t_k}$. (Z uvedeného riešenia akurát navyše vieme, že $t_i=0$ pre každé i.)