2006/2007
56. ročník Matematickej olympiády *Riešenia úloh MEMO*

I1. *Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla, pričom $a+b+c+d=4$. Dokážte, že*

$$a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab \leqq 4.$$

(*Švajčiarsko*)

Riešenie. Nech p, q, r, s sú (kladné) čísla a, b, c, d v takom poradí, že $p \geqq q \geqq r \geqq s$. Potom zrejme platí

$$pqr \geqq pqs \geqq prs \geqq qrs.$$

Podľa nerovnosti usporiadania[1] teda máme

$$a\cdot abc+b\cdot bcd+c\cdot cda+d\cdot dab \leqq p\cdot pqr+q\cdot pqs+r\cdot prs+s\cdot qrs=(pq+rs)(pr+qs).$$

Pre ľubovoľné reálne čísla A, B platí $AB \leqq \frac{1}{4}(A+B)^2$ (to dostaneme okamžite úpravou zrejmej nerovnosti $0 \leqq \frac{1}{4}(A-B)^2$). Použitím tejto nerovnosti najprv pre $A=pq+rs$, $B=pr+qs$ a neskôr pre $A=p+s$, $B=q+r$ postupne dostávame

$$\begin{aligned}(pq+rs)(pr+qs) &\leqq \frac{1}{4}(pq+rs+pr+qs)^2=\frac{1}{4}((p+s)(q+r))^2 \leqq \\ &\leqq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}(p+q+r+s)^2\right)^2=\frac{1}{64}(a+b+c+d)^4=4.\end{aligned}$$

Tým je zadaná nerovnosť dokázaná.

I2. *Množina loptičiek obsahuje n loptičiek, ktoré sú označené číslami $1, 2, 3, \ldots, n$. Daných je $k>1$ takých množín. Chceme zafarbiť všetky loptičky dvoma farbami, čiernou a bielou, a to tak, aby*

(i) loptičky označené rovnakým číslom mali rovnakú farbu,

(ii) každá množina $k+1$ loptičiek označených (nie nutne rôznymi) číslami $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$, ktoré spĺňajú podmienku $a_1+a_2+\ldots+a_k=a_{k+1}$, obsahovala z každej farby aspoň jednu loptičku.

V závislosti od k nájdite najväčšie možné číslo n, pre ktoré existuje takéto zafarbenie.

(Slovinsko)

Riešenie. Uvažujme pevné k a predpokladajme, že máme vyhovujúce zafarbenie pre maximálne možné n. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že loptičky s číslom 1 sú biele. Rozoberme dva možné prípady, aké môžu byť loptičky s číslom 2.

Prípad 1. Nech loptičky s číslom 2 sú čierne. Podľa podmienky (*ii*) musia byť loptičky s číslom $1+1+\cdots+1=k$ čierne a loptičky s číslom $2+2+\cdots+2=2k$ biele. Keďže

$$(k+1)+\underbrace{1+\cdots+1}_{(k-1)\text{-krát}}=2k$$

[1] Ak sú $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$ a $b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b_n$ dve n-tice reálnych čísel a $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, resp. $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ich ľubovoľné permutácie, tak pre súčet $S=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$ platí $S_{\min} \leqq S \leqq S_{\max}$, kde $S_{\min}=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_n$ a $S_{\max}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$. Táto známa nerovnosť (dokázať sa dá ľahko matematickou indukciou) sa nazýva *nerovnosť usporiadania*, často sa pre ňu používa anglický názov *rearrangement inequality*.

a loptičky s číslami 1 a $2k$ sú biele, loptičky s číslom $k+1$ musia byť čierne. Z rovností

$$\underbrace{1+\cdots+1}_{(k-1)\text{-krát}}+2k=\underbrace{2+\cdots+2}_{(k-1)\text{-krát}}+(k+1)=3k-1$$

vyplýva, že loptičky s číslom $3k-1$ nemôžu byť ani biele (medzi loptičkami s číslami 1, $2k$ a $3k-1$ by nebola zastúpená čierna farba), ani čierne (medzi loptičkami s číslami 2, $k+1$ a $3k-1$ by nebola zastúpená biela farba). V tomto prípade teda nutne $n \leqq 3k-2$.

Prípad 2. Nech loptičky s číslom 2 sú biele. Z rovností

$$\begin{aligned}
1+1+\cdots+1+1+1&=k,\\
1+1+\cdots+1+1+2&=k+1,\\
1+1+\cdots+1+2+2&=k+2,\\
&\vdots\\
1+2+\cdots+2+2+2&=2k-1,\\
2+2+\cdots+2+2+2&=2k
\end{aligned}$$

vyplýva, že loptičky s číslami $k, k+1, \ldots, 2k$ sú čierne. Potom loptičky s číslom $k+{}$ $+\,k+\cdots+k=k^2$ musia byť biele. Z rovností

$$\underbrace{1+\cdots+1}_{(k-1)\text{-krát}}+k^2=k+\underbrace{(k-1)+\cdots+(k-1)}_{(k-1)\text{-krát}}+(k+1)=k^2+k-1$$

vyplýva, že loptičky s číslom k^2+k-1 nemôžu byť ani biele (medzi loptičkami s číslami 1, k^2 a k^2+k-1 by nebola zastúpená čierna farba), ani čierne (medzi loptičkami s číslami $k-1$, $k+1$ a k^2+k-1 by nebola zastúpená biela farba). V tomto prípade teda nutne $n \leqq k^2+k-2$.

Pre každé $k \geqq 2$ platí $k^2+k-2 \geqq 3k-2$ (túto nerovnosť možno upraviť na tvar $k(k-2) \geqq 0$), takže v oboch prípadoch $n \leqq k^2+k-2$. Stačí už len ukázať príklad vyhovujúceho zafarbenia pre $n=k^2+k-2$.

Budeme postupovať nasledovne. Loptičky s číslami $1, 2, \ldots, k-1$ zafarbíme bielou, loptičky s číslami $k, k+1, \ldots, k^2-1$ čiernou a loptičky s číslami $k^2, k^2+1, \ldots, k^2+k-2$ opäť bielou farbou. Súčet čísel na k čiernych loptičkách je aspoň $k+\cdots+k=k^2>$ $>k^2-1$, takže čierne loptičky pravidlo (*ii*) neporušia. Ak zoberieme k bielych loptičiek, ktorých čísla sú nanajvýš $k-1$, tak súčet čísel na týchto loptičkách bude najviac

$$\underbrace{(k-1)+\cdots+(k-1)}_{k\text{-krát}}=k^2-k<k^2$$

a najmenej $1+\cdots+1=k$, teda súčet bude číslo nachádzajúce sa len na čiernych loptičkách. A ak aspoň jedna z k bielych loptičiek bude mať číslo aspoň k^2, tak súčet čísel na loptičkách bude aspoň

$$k^2+\underbrace{1+\cdots+1}_{(k-1)\text{-krát}}=k^2+k-1>n.$$

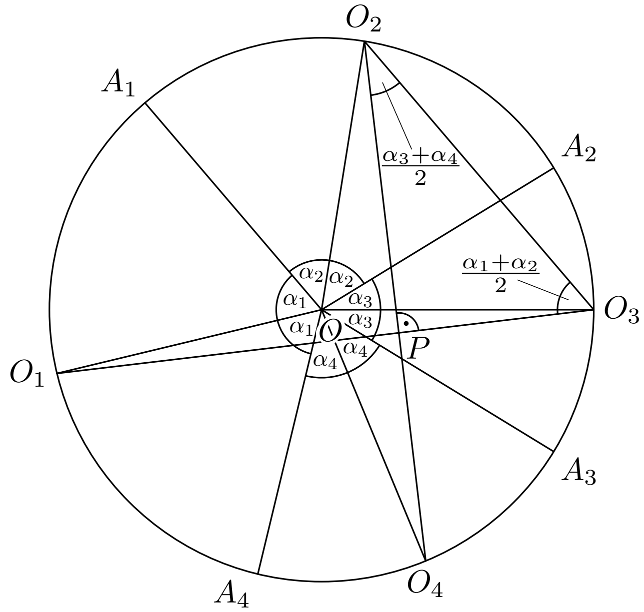
Ani biele loptičky preto pravidlo (*ii*) neporušia a uvedené zafarbenie vyhovuje.

I3. *Nech k je kružnica a k_1, k_2, k_3, k_4 sú štyri menšie kružnice so stredmi O_1, O_2, O_3, O_4 ležiacimi na k. Pre $i = 1, 2, 3, 4$ a $k_5 = k_1$ sa kružnice k_i a k_{i+1} pretínajú v bodoch A_i a B_i tak, že A_i leží na k. Body O_1, A_1, O_2, A_2, O_3, A_3, O_4, A_4 ležia v tomto poradí na k a sú navzájom rôzne. Dokážte, že $B_1B_2B_3B_4$ je pravouholník.* (Švajčiarsko)

Riešenie. Nech O je stred kružnice k a P je priesečník tetív O_1O_3 a O_2O_4. Pre $i = 1, 2, 3, 4$ a $A_4 = A_0$ označme $\alpha_i = |\measuredangle O_iOA_i| = |\measuredangle O_iOA_{i-1}|$. Zrejme $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 180°$ (obr. 1). Z vlastností obvodových a stredových uhlov máme

$$|\measuredangle PO_3O_2| = \frac{1}{2}|\measuredangle O_1OO_2| = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad |\measuredangle PO_2O_3| = \frac{1}{2}|\measuredangle O_4OO_3| = \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}.$$

Z trojuholníka PO_2O_3 potom ľahko dopočítame $|\measuredangle O_2PO_3| = 180° - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 90°$. Teda tetivy O_1O_3 a O_2O_4 sú navzájom kolmé.



Obr. 1

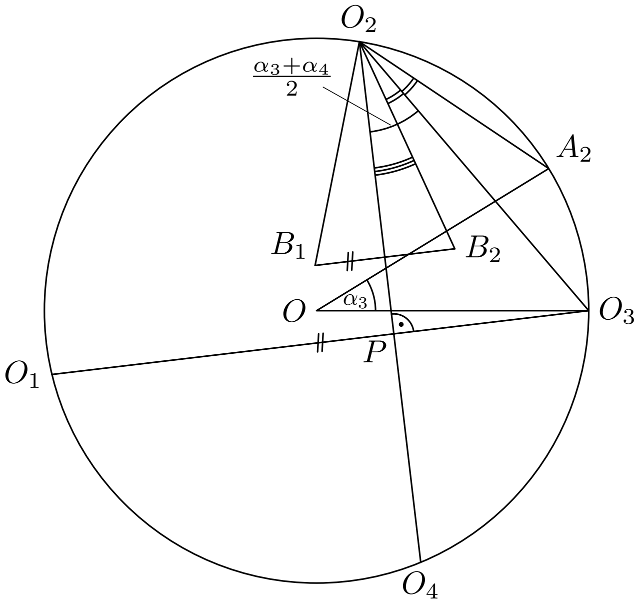
Dokážeme, že $B_1B_2 \parallel O_1O_3$. Keďže $|O_2B_1| = |O_2B_2|$, stačí ukázať, že uhly $O_4O_2B_1$, $O_4O_2B_2$ majú rovnakú veľkosť (potom sú B_1, B_2 súmerne združené podľa priamky O_2O_4, teda $B_1B_2 \perp O_2O_4$ a $B_1B_2 \parallel O_1O_3$). Keďže B_2 je obrazom bodu A_2 v osovej súmernosti podľa priamky O_2O_3 a uhol $O_3O_2A_2$ je obvodovým uhlom k stredovému uhlu O_3OA_2, máme (obr. 2)

$$|\measuredangle O_3O_2B_2| = |\measuredangle O_3O_2A_2| = \frac{1}{2}|\measuredangle O_3OA_2| = \frac{\alpha_3}{2}.$$

Preto

$$|\measuredangle O_4O_2B_2| = |\measuredangle PO_2O_3| - |\measuredangle O_3O_2B_2| = \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} - \frac{\alpha_3}{2} = \frac{\alpha_4}{2}.$$

Vzhľadom na symetrickosť zadania možno rovnakým spôsobom ukázať, že $|\measuredangle O_4O_2B_1| = \frac{\alpha_4}{2}$. Teda naozaj $|\measuredangle O_4O_2B_1| = |\measuredangle O_4O_2B_2|$ a $B_1B_2 \parallel O_1O_3$. Opäť vzhľadom na symetrickosť vieme rovnako ukázať, že $B_2B_3 \parallel O_2O_4$, $B_3B_4 \parallel O_1O_3$ a $B_4B_1 \parallel O_2O_4$. Z toho už priamo vyplýva, že $B_1B_2B_3B_4$ je pravouholník.



Obr. 2

I4. *Určte všetky dvojice (x, y) kladných celých čísel spĺňajúcich rovnosť*

$$x! + y! = x^y.$$

(*Česká rep.*)

Riešenie. Predpokladajme, že prirodzené čísla x, y spĺňajú zadanú rovnosť. Potom $x^y = x! + y! \geqq 2$, teda $x \geqq 2$.

Uvažujme najprv prípad $x = 2$. Z rovnosti $2 + y! = 2^y$ vyplýva, že $y!$ je párne, preto $y \geqq 2$. Odtiaľ $2 + y! = 2^y \equiv 0 \pmod 4$, takže $y! \equiv 2 \pmod 4$. To je zrejme možné jedine pre $y \in \{2, 3\}$. Keďže $2! + 2! = 2^2$ a $2! + 3! = 2^3$, dostávame dve riešenia $(2, 2)$ a $(2, 3)$.

Predpokladajme teraz, že $x \geqq 3$. V takom prípade je číslo $x - 1$ deliteľom $x!$, nie je však deliteľom x^y, lebo $\mathrm{nsd}(x, x-1) = 1$. Z toho vyplýva, že $x-1$ nedelí ani $x^y - x! = y!$, čiže $y \leqq x - 2$. Môžeme teda písať

$$x^y = x! + y! = y!\underbrace{\big((y+1)\cdot(y+1)\cdot\ldots\cdot x+1\big)}_{=k}.$$

Činiteľ k je očividne nesúdeliteľný s x (a teda aj s každou mocninou x) a zároveň z uvedenej rovnosti vyplýva, že je deliteľom čísla x^y. Preto nutne $k = 1$, čo je samozrejme nemožné.

Zadanú rovnosť spĺňajú iba dvojice $(2, 2)$ a $(2, 3)$.

T1. *Nech a, b, c, d sú ľubovoľné reálne čísla z uzavretého intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, 2 \right\rangle$ spĺňajúce $abcd = 1$. Nájdite maximálnu hodnotu výrazu*

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right)\left(d + \frac{1}{a}\right).$$

(*Česká rep.*)

Riešenie. Označme daný výraz V. S využitím podmienky $abcd = 1$ dostaneme postupnými úpravami

$$\begin{aligned} V &= \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right)\left(d + \frac{1}{a}\right) = \\ &= \frac{(ab+1)(bc+1)(cd+1)(da+1)}{abcd} = \frac{(2+ab+cd)(2+ad+bc)}{abcd} = \\ &= 4 + 2\cdot\frac{ab+cd+ad+bc}{abcd} + \frac{a^2bd + b^2ac + c^2bd + d^2ac}{abcd} = \\ &= 4 + 2\cdot\frac{(a+c)(b+d)}{\sqrt{abcd}} + \frac{bd(a^2+c^2) + ac(b^2+d^2)}{abcd} = \\ &= 4 + 2\cdot\left(\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(\sqrt{\frac{b}{d}} + \sqrt{\frac{d}{b}}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{d} + \frac{d}{b}\right) = \\ &= 4 + 2\cdot f\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right) f\left(\sqrt{\frac{b}{d}}\right) + f\left(\frac{a}{c}\right) + f\left(\frac{b}{d}\right), \end{aligned}$$

kde f je funkcia určená predpisom $f(x) = x + 1/x$. Nerovnosť $x + 1/x > y + 1/y$ je pre kladné x, y ekvivalentná s nerovnosťou

$$\frac{(x-y)(xy-1)}{xy} > 0,$$

a teda uvedená funkcia je na intervale $\langle 1, \infty)$ rastúca a na intervale $(0, 1\rangle$ klesajúca. Keďže $\frac{1}{2} \leqq a, b, c, d \leqq 2$, zrejme platia nerovnosti

$$\frac{1}{4} \leqq \frac{a}{c} \leqq 4, \qquad \frac{1}{4} \leqq \frac{b}{d} \leqq 4, \qquad \frac{1}{2} \leqq \sqrt{\frac{a}{c}} \leqq 2, \qquad \frac{1}{2} \leqq \sqrt{\frac{b}{d}} \leqq 2. \tag{1}$$

Navyše $f(\frac{1}{4}) = f(4) = \frac{17}{4}$ a $f(\frac{1}{2}) = f(2) = \frac{5}{2}$. Z nerovností (1) a s rastúcosti, resp. klesajúcosti funkcie f na spomínaných intervaloch preto vyplýva

$$V \leqq 4 + 2\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2} + \frac{17}{4} + \frac{17}{4} = 25.$$

Pritom rovnosť platí práve vtedy, keď $a/c, b/d \in \{\frac{1}{4}, 4\}$, t. j. pre štvorice $(2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$, $(\frac{1}{2}, 2, 2, \frac{1}{2})$ a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 2)$, ktoré „našťastie“ spĺňajú aj podmienku $abcd = 1$.

Odpoveď. Maximálna hodnota uvedeného výrazu je 25.

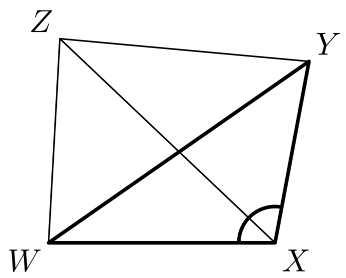
Poznámka. Z uvedeného postupu vyplýva, že minimálna hodnota výrazu V je $4 + 2\cdot f(1)\cdot f(1) + f(1) + f(1) = 16$ a nadobúda sa pre štvorice (a, b, c, d) spĺňajúce okrem podmienky $abcd = 1$ aj rovnosti $a/c = b/d = 1$, t. j. pre štvorice $(t, 1/t, t, 1/t)$, pričom $\frac{1}{2} \leqq t \leqq 2$.

T2. *Pre ľubovoľnú množinu P piatich bodov v rovine vo všeobecnej polohe označíme $a(P)$ počet ostrouhlých trojuholníkov s vrcholmi v P (body sú vo všeobecnej polohe, ak sú navzájom rôzne a žiadne tri z nich neležia na jednej priamke). Určte najväčšiu možnú hodnotu $a(P)$.* (Švajčiarsko)

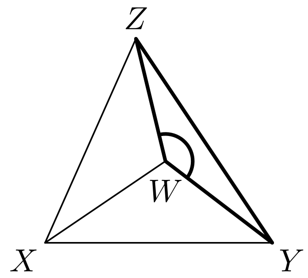
Riešenie. Kvôli stručnosti nazývajme *škaredými* tie trojuholníky, ktoré nie sú ostrouhlé (t. j. sú pravouhlé alebo tupouhlé). Najskôr ukážeme, že aspoň jeden zo štyroch trojuholníkov určených danými štyrmi bodmi vo všeobecnej polohe je škaredý.

Ak sú uvedené štyri body vrcholmi konvexného štvoruholníka $WXYZ$, aspoň jeden z jeho vnútorných uhlov má veľkosť aspoň $90°$ (lebo súčet štyroch vnútorných uhlov v ľubovoľnom štvoruholníku je $360°$). Ak je to napríklad uhol pri vrchole X, tak trojuholník WXY je škaredý (obr. 3a).

Ak uvedené štyri body nie sú vrcholmi konvexného štvoruholníka, tak jeden z nich (označme ho W) leží vnútri trojuholníka XYZ tvoreného zvyšnými tromi bodmi. Potom niektorý z uhlov XWY, YWZ, ZWX má veľkosť aspoň $120°$ (lebo ich súčet je $360°$) a trojuholník s týmto uhlom je škaredý (obr. 3b).

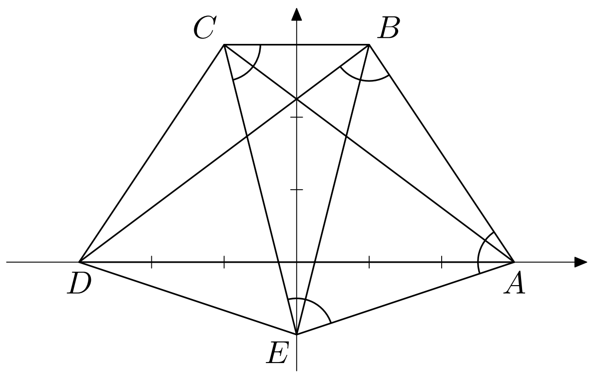


Obr. 3a



Obr. 3b

Uvažujme teraz ľubovoľnú päticu bodov A, B, C, D, E. Aspoň jeden z trojuholníkov určených bodmi A, B, C, D je škaredý. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to ABC. Potom aspoň jeden z trojuholníkov určených bodmi B, C, D, E je škaredý a trojuholník ABC s ním má spoločný aspoň jeden vrchol; bez ujmy na všeobecnosti nech je to vrchol B. Aspoň jeden z trojuholníkov určených bodmi A, C, D, E je škaredý a navyše to nie je žiadny z doteraz objavených škaredých trojuholníkov (lebo nemá vrchol B). Teda ľubovoľná množina P piatich bodov tvorí aspoň tri škaredé trojuholníky a $a(P) \leqq 7$ (zrejme päť bodov vo všeobecnej polohe tvorí práve 10 trojuholníkov).



Obr. 4

Stačí už len nájsť[2] príklad množiny P, pre ktorú $a(P) = 7$. Zoberme v karteziánskej súradnicovej sústave päticu bodov

$$A = (3, 0), \quad B = (1, 3), \quad C = (-1, 3), \quad D = (-3, 0), \quad E = (0, -1).$$

Ostré nie sú iba uhly ABC, BCD a DEA. Aby sme dokázali, že všetky ostatné sú ostré, stačí dokázať ostrosť uhlov ABD, BCE, CEA a EAB (obr. 4); všetky ostatné uhly sú buď menšie (lebo sú ich časťami), alebo rovnaké (vďaka symetrii). Uhol BCE je ostrý, lebo je vnútorným uhlom pri základni v rovnoramennom trojuholníku BCE. Pre ostatné tri uhly stačí podľa kosínusovej vety[3] dokázať nerovnosti

$$\begin{aligned}|AB|^2 + |BD|^2 &> |AD|^2,\\ |CE|^2 + |EA|^2 &> |CA|^2,\\ |EA|^2 + |AB|^2 &> |EB|^2.\end{aligned}$$

Jednoduchým výpočtom dostávame

$$\begin{aligned}|AB|^2 + |BD|^2 &= (2^2 + 3^2) + (4^2 + 3^2) = 38 > 36 = 6^2 = |AD|^2,\\ |CE|^2 + |EA|^2 &= (4^2 + 1^2) + (1^2 + 3^2) = 27 > 25 = 4^2 + 3^2 = |CA|^2,\\ |EA|^2 + |AB|^2 &= (1^2 + 3^2) + (2^2 + 3^2) = 23 > 17 = 4^2 + 1^2 = |EB|^2.\end{aligned}$$

T3. *Nech $s(T)$ označuje súčet dĺžok hrán štvorstena T. Uvažujme štvorsteny s vlastnosťou, že dĺžky ich šiestich hrán sú navzájom rôzne kladné celé čísla, pričom jedno je 2 a jedno je 3. Nazvime ich MEMO-štvorstenmi.*

a) Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré existuje MEMO-štvorsten T taký, že $s(T) = n$.

b) Koľko existuje navzájom nezhodných MEMO-štvorstenov T takých, že $s(T) = 2007$?

Dva štvorsteny sú nezhodné, ak jeden nemôže byť zobrazený na druhý pomocou súmerností podľa rovín, posunutí a otočení.

(Nie je potrebné dokázať, že štvorsteny uvažované v riešení sú nedegenerované, t. j. že majú nenulový objem.) (*Rakúsko*)

Riešenie. Sú dva prípady, ako môžu byť v MEMO-štvorstene umiestnené hrany dĺžok 2 a 3.

Prípad 1. Nech hrany dĺžok 2 a 3 vychádzajú z jedného vrcholu A; označme tieto hrany postupne AB a AC. Aby boli splnené trojuholníkové nerovnosti v trojuholníku ABC a súčasne podmienky zo zadania, musí mať hrana BC dĺžku 4. Označme D štvrtý vrchol skúmaného MEMO-štvorstena. Nech hrana AD má (celočíselnú) dĺžku a. Potom hrana BD môže mať iba dĺžku $a + 1$ alebo $a - 1$ (aby boli splnené trojuholníkové nerovnosti v trojuholníku ABD). Rozoberme obe možnosti.

Ak $|BD| = a+1$, musí platiť $a-3 < |CD| < a+3$ (aby boli splnené trojuholníkové nerovnosti v trojuholníku ADC). Kvôli rôznosti dĺžok všetkých šiestich hrán tak máme

[2] Pred hľadaním je užitočné uvedomiť si, ako pre dané dva body X, Y vyzerá množina takých bodov Z, že trojuholník XYZ je ostrouhlý.

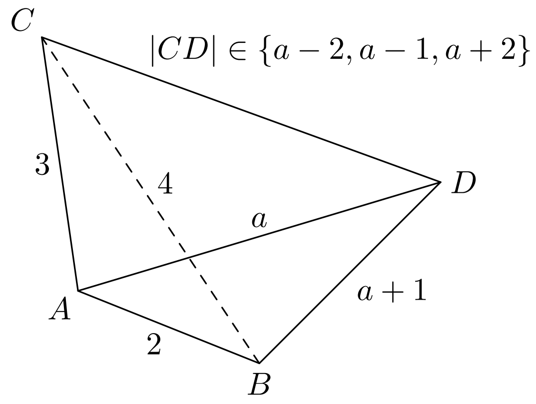
[3] Alebo podľa Pytagorovej vety a jednoduchej úvahy.

$|CD| \in \{a-2, a-1, a+2\}$ (obr. 5a). Ľahko overíme, že pre každú z týchto troch hodnôt (pri zrejmej podmienke $a \geqq 5$) sú splnené všetky trojuholníkové nerovnosti vo všetkých štyroch stenách štvorstena. Vypočítajme, aká môže byť hodnota $s(T)$.

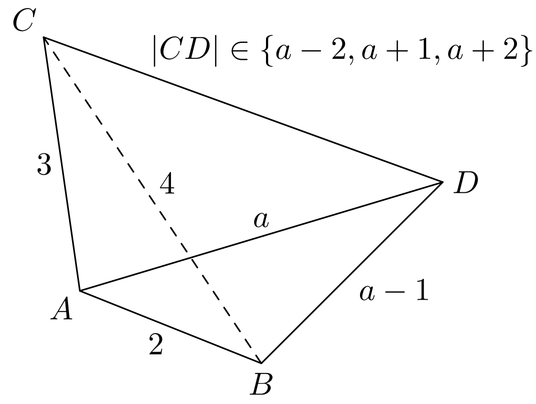
- ▷ $|CD| = a-2$, $s(T) = 2+3+4+a+(a+1)+(a-2) = 3a+8$, nutná a postačujúca podmienka, aby mali všetky hrany rôzne dĺžky, je $a \geqq 7$.
- ▷ $|CD| = a-1$, $s(T) = 2+3+4+a+(a+1)+(a-1) = 3a+9$, $a \geqq 6$.
- ▷ $|CD| = a+2$, $s(T) = 2+3+4+a+(a+1)+(a+2) = 3a+12$, $a \geqq 5$.

Ak $|BD| = a-1$, rovnako musí platiť $a-3 < |CD| < a+3$ a kvôli rôznosti dĺžok všetkých hrán dostávame $|CD| \in \{a-2, a+1, a+2\}$ (obr. 5b). Opäť jednoducho overíme platnosť všetkých trojuholníkových nerovností (pri zrejmej podmienke $a \geqq 6$) a vypočítame možné hodnoty $s(T)$.

- ▷ $|CD| = a-2$, $s(T) = 2+3+4+a+(a-1)+(a-2) = 3a+6$, $a \geqq 7$.
- ▷ $|CD| = a+1$, $s(T) = 2+3+4+a+(a-1)+(a+1) = 3a+9$, $a \geqq 6$.
- ▷ $|CD| = a+2$, $s(T) = 2+3+4+a+(a-1)+(a+2) = 3a+10$, $a \geqq 6$.



Obr. 5a



Obr. 5b

V prvom prípade teda máme šesť rôznych typov MEMO-štvorstenov. Pri prvom type nadobúda $s(T)$ hodnoty

$$\{3a+8; a \geqq 7\} = \{29, 32, 35, 38, \dots\},$$

pri druhom, treťom, štvrtom a piatom type hodnoty

$$\{3a+9; a \geqq 6\} = \{3a+12; a \geqq 5\} = \{3a+6; a \geqq 7\} = \{27, 30, 33, 36, \dots\}$$

a pri šiestom type hodnoty

$$\{3a+10; a \geqq 6\} = \{28, 31, 34, 37, \dots\}.$$

Zjednotením uvedených množín dostávame, že MEMO-štvorsten T spĺňajúci $s(T) = n$ existuje pre každé $n \geqq 27$.

Prípad 2. Nech hrany dĺžok 2 a 3 nemajú žiadny spoločný bod; označme AB hranu s dĺžkou 2 a CD hranu s dĺžkou 3. Aby boli splnené trojuholníkové nerovnosti v trojuholníku ABC, musia sa dĺžky hrán AC, BC líšiť o 1 (podľa zadania nemôžu byť rovnaké). Bez ujmy na všeobecnosti nech $|AC| = a$ a $|BC| = a+1$ (označenie vrcholov A, B totiž môžeme „vymeniť“).

Aby boli splnené trojuholníkové nerovnosti v trojuholníku ACD, nutne $a-3 < < |AD| < a+3$ a kvôli rôznosti dĺžok hrán máme

$$|AD| \in \{a-2, a-1, a+2\}.$$

Podobným spôsobom (uvažujúc trojuholník BCD) dostávame $a-2 < |BD| < a+4$, t. j.

$$|BD| \in \{a-1, a+2, a+3\}.$$

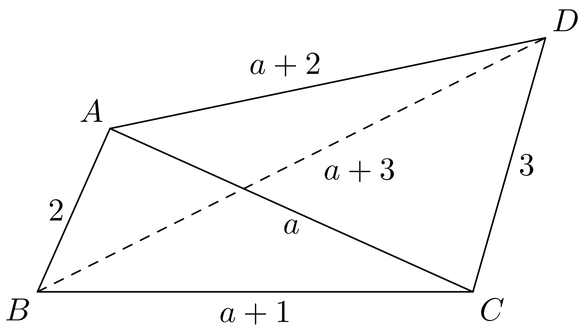
Navyše kvôli trojuholníkovej nerovnosti v trojuholníku ABD sa dĺžky $|AD|$ a $|BD|$ musia líšiť práve o 1. Do úvahy teda prichádzajú iba dve možnosti: buď $|AD| = a-2$ a $|BD| = a-1$, alebo $|AD| = a+2$ a $|BD| = a+3$.

▷ Ak $|AD| = a-2$ a $|BD| = a-1$, tak $s(T) = 2+3+a+(a+1)+(a-2)+(a-1) = 4a+3$, pričom kvôli rôznosti hrán nutne $a \geqq 6$.

▷ Ak $|AD| = a+2$ a $|BD| = a+3$, tak $s(T) = 2+3+a+(a+1)+(a+2)+(a+3) = 4a+11$, pričom $a \geqq 4$.

Ľahko skontrolujeme, že pri oboch možnostiach sú splnené všetky trojuholníkové nerovnosti. V skutočnosti sú štvorsteny, ktoré dostaneme pri prvej možnosti, zhodné so štvorstenmi z druhej možnosti (stačí vymeniť označenie vrcholov C, D a „posunúť“ hodnotu a o 2). V druhom prípade preto máme iba jeden typ štvorstenov: $|AB| = 2$, $|CD| = 3$, $|AC| = a$, $|BC| = a+1$, $|AD| = a+2$ a $|BD| = a+3$, pričom $a \geqq 4$ (obr. 6). Hodnota $s(T)$ je v tomto prípade prvkom množiny

$$\{4a+11; a \geqq 4\} = \{27, 31, 35, 39, \dots\}.$$



Obr. 6

Na základe predošlej analýzy jednoducho vyriešime obe časti úlohy.

a) Keďže v druhom prípade sme nezískali žiadne nové hodnoty pre $s(T)$, platí odpoveď získaná v prvom prípade: MEMO-štvorsten T spĺňajúci $s(T) = n$ existuje práve vtedy, keď $n \geqq 27$.

b) Číslo 2007 vieme zapísať v tvaroch

$$2007 = 3 \cdot 666 + 9 = 3 \cdot 665 + 12 = 3 \cdot 667 + 6 = 4 \cdot 499 + 11.$$

MEMO-štvorsten T spĺňajúci $s(T) = 2007$ teda vieme vytvoriť podľa druhého, tretieho, štvrtého a piateho typu v prvom prípade aj podľa jediného typu v druhom prípade. Spolu je to 5 rôznych MEMO-štvorstenov (z uvedenej analýzy je zrejmé, že sú navzájom nezhodné, o čom sa možno ľahko presvedčiť aj vypísaním ich konkrétnych dĺžok hrán).

T4. *Určte všetky kladné celé čísla k s nasledujúcou vlastnosťou: existuje celé číslo a také, že $(a+k)^3 - a^3$ je násobkom čísla 2007.* (*Rakúsko*)

Riešenie. Číslo $(a+k)^3 - a^3$ je násobkom čísla $2007 = 9 \cdot 223$ práve vtedy, keď je násobkom 9 aj násobkom 223. Keďže

$$(a+k)^3 - a^3 = 3(a^2k + ak^2) + k^3,$$

nutnou podmienkou na to, aby uvedené číslo bolo násobkom deviatich (a teda aj troch) je, aby k^3 bolo deliteľné tromi. To platí len pre k, ktoré sú sami násobkom troch. Preto každé hľadané k možno zapísať v tvare $k = 3m$ pre nejaké prirodzené číslo m. Naopak, ak $k = 3m$, tak

$$(a+k)^3 - a^3 = (a+3m)^3 - a^3 = 9(a^2m + 3am^2 + 3m^3),$$

čiže uvedené číslo je deliteľné deviatimi.

Takže našou úlohou je určiť prirodzené čísla m, pre ktoré existuje celé číslo a také, že číslo $(a+3m)^3 - a^3$ je násobkom 223. Uvedenú podmienku spĺňa každé prirodzené m. Stačí položiť napríklad $a = 38m$. Potom

$$(a+3m)^3 - a^3 = (41m)^3 - (38m)^3 = 14\,049m^3 = 9 \cdot 7 \cdot 223m^3.$$

Odpoveď. Zadanú vlastnosť majú všetky prirodzené čísla k, ktoré sú násobkom troch.

Poznámka. K hodnote $a = 38m$ sa dá dopracovať skúšaním. Existuje však aj iná možnosť. Úlohu totiž možno ekvivalentne preformulovať v reči kongruencií: *Určte tie zvyškové triedy m, ku ktorým existuje zvyšková trieda a taká, že*

$$(a+3m)^3 \equiv a^3 \pmod{223}. \tag{1}$$

Ak danú podmienku spĺňa nejaký zvyšok m, spĺňa ju aj každý jeho násobok mt, lebo vynásobením kongruencie (1) zvyškom t^3 dostaneme

$$(at + 3mt)^3 \equiv (at)^3 \pmod{223}.$$

Keďže 223 je prvočíslo, stačí nájsť jeden nenulový zvyšok m, ktorý spĺňa (1) pre nejaký zvyšok a. Každý iný zvyšok sa dá napísať ako jeho vhodný násobok[4]. Stačí teda úlohu vyriešiť napr. pre hodnotu $m = 1$, t. j. nájsť také a, že

$$(a+3)^3 \equiv a^3 \pmod{223}. \tag{2}$$

Predpokladajme, že zvyšok a spĺňa (2). Potom $a \neq 0$ a teda $3 \equiv ra \pmod{223}$ pre vhodné r. Po vydelení kongruencie (2) zvyškom a^3 (zrejme $\mathrm{nsd}(a^3, 223) = 1$) dostaneme

$$(1+r)^3 \equiv 1 \pmod{223}. \tag{3}$$

Zvyšok r spĺňajúci (3) už nájdeme ľahko. Podľa malej Fermatovej vety totiž $z^{222} \equiv 1 \pmod{223}$ pre každý nenulový zvyšok z. Zároveň $z^{222} = (z^{74})^3$. Preto zvolíme $r \equiv$ $\equiv z^{74} - 1 \pmod{223}$. Nenulové r tak dostaneme napr. pre $z = 3$, ale aj pre mnohé iné hodnoty[5]. Konkrétne $r \equiv 3^{74} - 1 \equiv 182 \pmod{223}$ a odtiaľ $a \equiv 38 \pmod{223}$ (lebo $182 \cdot 38 \equiv 3 \pmod{223}$).

[4] Inak povedané, pre nenulový zvyšok m obsahuje množina $\{m, 2m, \dots, 222m\}$ všetky nenulové zvyšky modulo 223.

[5] Treba zobrať také z, že množina $\{1, z, z^2, \dots, z^{222}\}$ obsahuje všetky nenulové zvyšky, t. j. každý nenulový zvyšok práve raz. Tým je zabezpečené $z^{74} \not\equiv 1 \pmod{223}$. Také z vždy existuje, čo je známy, i keď nie triviálny fakt z teórie čísel.