2012/2013
62. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh MEMO*

(*Súťaž sa konala 22. – 28. 8. 2013.*)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. Nech a, b a c sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí

$$a+b+c=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Dokážte, že

$$2(a+b+c)\geqq \sqrt[3]{7a^2b+1}+\sqrt[3]{7b^2c+1}+\sqrt[3]{7c^2a+1}.$$

Nájdite všetky trojice (a,b,c), pre ktoré nastáva rovnosť. (*Slovensko, Patrik Bak*)

I-2. Nech n je kladné celé číslo. Na šachovnici pozostávajúcej z $4n\times 4n$ políčok je rozmiestnených $4n$ žetónov. Každý riadok a každý stĺpec obsahuje práve jeden žetón. Pri ťahu je žetón presunutý na stranou susediace políčko. Na políčkach môže byť aj viac ako jeden žetón. Cieľom je presunúť žetóny tak, že nakoniec budú umiestnené na všetkých políčkach jednej z dvoch diagonál šachovnice. Určte najmenšie $k(n)$ také, že pre ľubovoľné počiatočné rozloženie žetónov vieme dosiahnuť výsledné rozloženie na najviac $k(n)$ ťahov. (*Nemecko, Bernd Mulansky*)

I-3. Je daný rovnoramenný trojuholník ABC taký, že $|AC|=|BC|$. Nech N je vnútorný bod trojuholníka ABC, pre ktorý platí

$$2|\measuredangle ANB|=180^\circ+|\measuredangle ACB|.$$

Nech D je priesečníkom priamky BN a priamky rovnobežnej s AN prechádzajúcej bodom C. Označme P priesečník osí uhlov CAN a ABN. Dokážte, že priamky DP a AN sú na seba kolmé. (*Chorvátsko, Matija Basić*)

I-4. Nech a a b sú kladné celé čísla. Dokážte, že existujú kladné celé čísla x a y také, že

$$\binom{x+y}{2}=ax+by.$$

(*Maďarsko, Bálint Hujter*)

Súťaž družstiev:

T-1. Nájdite všetky funkcie $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ také, že pre všetky $x,y\in\mathbb{R}$ platí

$$f(xf(x)+2y)=f(x^2)+f(y)+x+y-1.$$

(*Slovensko, Patrik Bak*)

T-2. Nech $x, y, z, w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sú také, že $x + y \neq 0$, $z + w \neq 0$ a $xy + zw \geqq 0$. Ukážte platnosť nerovnosti

$$\left(\frac{x+y}{z+w} + \frac{z+w}{x+y}\right)^{-1} + \frac{1}{2} \geqq \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{y}{w} + \frac{w}{y}\right)^{-1}.$$

(*Švajčiarsko, Raphael Steiner*)

T-3. Na jednej strane ulice sa nachádza $n \geqq 2$ domov. Zo západu na východ sú označené číslami od 1 po n. Číslo každého domu je napísané na ceduľke. Jedného dňa sa obyvatelia ulice rozhodli vystreliť si z poštára a pomiešali ceduľky s číslami domov nasledujúcim spôsobom: každej dvojici susedných domov vymenili počas dňa ceduľky s ich aktuálnym číslom práve raz. Koľko rôznych usporiadaní ceduliek s číslami môže na konci dňa nastať? (*Maďarsko, Bálint Hujter*)

T-4. Uvažujme konečne veľa bodov v rovine takých, že žiadne tri neležia na jednej priamke. Každý z týchto bodov ofarbíme červenou alebo zelenou farbou tak, že vo vnútri trojuholníka s vrcholmi jednej farby sa nachádza aspoň jeden bod ofarbený druhou farbou. Aký je maximálny počet bodov s touto vlastnosťou?

(*Maďarsko, Bálint Hujter*)

T-5. Je daný ostrouhlý trojuholník ABC. Skonštruujte trojuholník PQR, pre ktorý platí $|AB| = 2|PQ|$, $|BC| = 2|QR|$, $|CA| = 2|RP|$ a priamky PQ, QR a RP prechádzajú postupne bodmi A, B a C. (Body A, B, C, P, Q a R sú rôzne.)

(*Rakúsko, Gerd Baron*)

T-6. Nech K je bod vnútri ostrouhlého trojuholníka ABC taký, že BC je spoločnou dotyčnicou kružníc opísaných trojuholníkom AKB a AKC. Nech D je priesečník priamok CK a AB a bod E je priesečník priamok BK a AC. Označme F priesečník priamky BC a osi úsečky DE. Kružnica opísaná trojuholníku ABC a kružnica k so stredom F a polomerom FD sa pretínajú v bodoch P a Q. Dokážte, že úsečka PQ je priemerom kružnice k. (*Slovensko, Patrik Bak*)

T-7. Do tabuľky pozostávajúcej z 2013×2013 políčok sú po riadkoch napísané čísla od 1 do 2013^2. Všetky stĺpce a všetky riadky obsahujúce aspoň jednu z druhých mocnín 1, 4, 9, ..., 2013^2 naraz odstránime. Koľko políčok tabuľky ostane?

(*Rakúsko, Gerd Baron*)

T-8. Na tabuli je napísaný výraz

$$\pm \square \pm \square \pm \square \pm \square \pm \square \pm \square.$$

Hráči A a B sa striedajú pri nahrádzaní symbolov $\square$ kladnými celými číslami. Hráč A začína. Keď sú všetky symboly $\square$ nahradené, hráč A nahradí každý znak $\pm$ znamienkom $+$ alebo $-$, nezávisle na ostatných nahradeniach znakov $\pm$. Hráč A vyhrá, ak hodnota výrazu na tabuli nie je deliteľná žiadnym z čísel 11, 12, ..., 18. Inak vyhrá hráč B. Určte, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu. (*Česká republika, Michal Rolínek*)