2013/2014
63. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie A

(*Termín odovzdania: v pondelok 2. decembra 2013.*)

1. Číslo n je súčinom troch (nie nutne rôznych) prvočísel. Keď zväčšíme každé z nich o 1, zväčší sa ich súčin o 963. Určte pôvodné číslo n. (*Pavel Novotný*)

2. Pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y, z dokážte nerovnosť

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leqq m^2, \quad \text{pričom } m = \min\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}, \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right).$$

Zistite tiež, kedy v dokázanej nerovnosti nastane rovnosť.
(*Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša*)

3. Označme I stred kružnice vpísanej do daného trojuholníka ABC. Predpokladajme, že kolmica na priamku CI vedená bodom I pretína priamku AB v bode M. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku ABC pretína úsečku CM v jej vnútornom bode N a že priamky NI a MC sú navzájom kolmé. (*Peter Novotný*)

4. Označme $l(n)$ najväčšieho nepárneho deliteľa čísla n. Určte hodnotu súčtu

$$l(1) + l(2) + l(3) + \ldots + l(2^{2013}).$$

(*Michal Rolínek*)

5. Koľkými rôznymi spôsobmi možno vydláždiť plochu 3×10 dlaždicami 2×1, ak je dovolené klásť ich v oboch navzájom kolmých smeroch? (*Stanislava Sojáková*)

6. V rovine daného trojuholníka ABC určte všetky body, ktorých obrazy v osových súmernostiach podľa priamok AB, BC, CA tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka.
(*Pavel Calábek*)