

2013/2014
63. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie B

(Termín odovzdania: v pondelok 13. januára 2014.)

1. Každému vrcholu pravidelného 63-uholníka priradíme jedno z čísel 1 alebo -1 . Ku každej jeho strane pripíšeme súčin čísel v jej vrcholoch a všetky čísla pri jednotlivých stranách sčítame. Nájdite najmenšiu možnú nezápornú hodnotu takejto súčtu.

(Pavel Calábek)

2. Určte všetky dvojice (x, y) reálnych čísel, pre ktoré platí nerovnosť

$$(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2.$$

(Jaroslav Švrček)

3. Nech D je ľubovoľný vnútorný bod strany AB trojuholníka ABC . Na polpriamkach BC a AC zvolme postupne body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokážte, že body C, E, F a stred I kružnice vpísanej trojuholníku ABC ležia na jednej kružnici.

(Jaroslav Švrček)

4. Dana napísala na papier trojciferné číslo, ktoré po delení siedmimi dáva zvyšok 2. Prehodením prvých dvoch cifier vzniklo trojciferné číslo, ktoré po delení siedmimi dáva zvyšok 3. Číslo, ktoré vznikne prehodením posledných dvoch cifier pôvodného čísla, dáva po delení siedmimi zvyšok 5. Aký zvyšok po delení siedmimi bude mať číslo, ktoré vznikne prehodením prvej a poslednej cifry Daninho čísla?

(Pavel Novotný)

5. V rovine sú dané body A, T, U tak, že uhol ATU je tupý. Zostrojte trojuholník ABC , v ktorom T, U sú postupne body dotyku strany BC s kružnicou trojuholníku vpísanou a pripísanou. (Pripísanou kružnicou tu rozumieme kružnicu, ktorá sa okrem strany BC dotýka aj polpriamok opačných k polpriamkam BA a CA .)

(Šárka Gergelitsová)

6. Nájdite najmenšie reálne číslo r také, že tyč s dĺžkou 1 možno rozlámať na štyri časti dĺžky nanajvýš r tak, že sa zo žiadnych troch týchto častí nedá zložiť trojuholník.

(Ján Mazák)