2013/2014
63. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie C*

(*Termín odovzdania: v pondelok 13. januára 2014.*)

1. Určte, akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať výraz $V = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$, ak reálne čísla a, b, c spĺňajú dvojicu podmienok

$$\begin{aligned} a + 3b + c &= 6, \\ -a + b - c &= 2. \end{aligned}$$

(*Jaroslav Švrček*)

2. V rovine sú dané body A, P, T neležiace na jednej priamke. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby P bola päta jeho výšky z vrcholu A a T bod dotyku strany AB s kružnicou jemu vpísanou. Uveďte diskusiu o počte riešení vzhľadom na polohu daných bodov. (*Pavel Leischner*)

3. Číslo n je súčinom troch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme dve menšie z nich o 1 a najväčšie ponecháme nezmenené, zväčší sa ich súčin o 915. Určte číslo n. (*Pavel Novotný*)

4. Vo štvorci $ABCD$ označme K stred strany AB a L stred strany AD. Úsečky KD a LC sa pretínajú v bode M a rozdeľujú štvorec na dva trojuholníky a dva štvoruholníky. Vypočítajte ich obsahy, ak úsečka LM má dĺžku 1 cm. (*Leo Boček*)

5. Dokážte, že pre každé nepárne prirodzené číslo n je súčet $n^4 + 2n^2 + 2\,013$ deliteľný číslom 96. (*Jaromír Šimša*)

6. Šachového turnaja sa zúčastnilo 8 hráčov a každý s každým odohral jednu partiu. Za víťazstvo získal hráč 1 bod, za remízu pol bodu, za prehru žiadny bod. Na konci turnaja mali všetci účastníci rôzne počty bodov. Hráč, ktorý skončil na 2. mieste, získal rovnaký počet bodov ako poslední štyria dokopy. Určte výsledok partie medzi 4. a 6. hráčom v celkovom poradí. (*Vojtech Bálint*)