SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

63. ročník, školský rok 2013/2014

Domáce kolo

Kategórie A, B, C – zadania úloh

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 63. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **2. decembra 2013** (kategória **A**) a do **13. januára 2014** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X a práve traja žiaci (vrátane X) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2014 v Južnej Afrike), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2014 v Poľsku) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude v septembri 2014 v Nemecku).

Pre najlepších riešiteľov MO kategórie **C** sa v máji 2014 uskutoční Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Výber slovenského družstva prebehne nasledovne: Riešenia najlepších riešiteľov krajského kola kategórie C budú centrálne zozbierané a jednotne ohodnotené. Podľa poradia po tomto ohodnotení budú oslovení prví šiesti s ponukou účasti na súťaži (v prípade rovnosti bodov sa ako doplňujúce kritérium môže brať do úvahy účasť vo vyššej kategórii MO, účasť v korešpondenčnom seminári, či účasť v Z9 v predošlom šk. roku).

Termíny 63. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	10. 12. 2013	14. 01. 2014	23. – 26. 03. 2014
Kategórie B, C	23. 01. 2014	08. 04. 2014	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera, Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2013/2014
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://matematika.okamzite.eu`
`http://fpedas.uniza.sk/~novotny/MO.htm` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je kategória BETA. Pre tých, ktorí majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený korešpondenčný seminár *i*KS, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o *i*KS nájdete na `http://kms.sk` a `http://iksko.org`.

Na ďalšiu spoluprácu sa tešia

Bc. Jozef Jakubík, Filip Sládek

****

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Číslo n je súčinom troch (nie nutne rôznych) prvočísel. Keď zväčšíme každé z nich o 1, zväčší sa ich súčin o 963. Určte pôvodné číslo n. (*Pavel Novotný*)

A – I – 2

Pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y, z dokážte nerovnosť

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leqq m^2, \quad \text{pričom } m = \min\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}, \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right).$$

Zistite tiež, kedy v dokázanej nerovnosti nastane rovnosť. (*Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša*)

A – I – 3

Označme I stred kružnice vpísanej do daného trojuholníka ABC. Predpokladajme, že kolmica na priamku CI vedená bodom I pretína priamku AB v bode M. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku ABC pretína úsečku CM v jej vnútornom bode N a že priamky NI a MC sú navzájom kolmé. (*Peter Novotný*)

A – I – 4

Označme $l(n)$ najväčšieho nepárneho deliteľa čísla n. Určte hodnotu súčtu

$$l(1) + l(2) + l(3) + \cdots + l(2^{2013}).$$

(*Michal Rolínek*)

A – I – 5

Koľkými rôznymi spôsobmi možno vydláždiť plochu 3×10 dlaždicami 2×1, ak je dovolené klásť ich v oboch navzájom kolmých smeroch? (*Stanislava Sojáková*)

A – I – 6

V rovine daného trojuholníka ABC určte všetky body, ktorých obrazy v osových súmernostiach podľa priamok AB, BC, CA tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka. (*Pavel Calábek*)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Každému vrcholu pravidelného 63-uholníka priradíme jedno z čísel 1 alebo -1. Ku každej jeho strane pripíšeme súčin čísel v jej vrcholoch a všetky čísla pri jednotlivých stranách sčítame. Nájdite najmenšiu možnú nezápornú hodnotu takého súčtu. (*Pavel Calábek*)

B – I – 2

Určte všetky dvojice (x, y) reálnych čísel, pre ktoré platí nerovnosť

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geqq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

B – I – 3

Nech D je ľubovoľný vnútorný bod strany AB trojuholníka ABC. Na polpriamkach BC a AC zvoľme postupne body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokážte, že body C, E, F a stred I kružnice vpísanej trojuholníku ABC ležia na jednej kružnici. (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 4

Dana napísala na papier trojciferné číslo, ktoré po delení siedmimi dáva zvyšok 2. Prehodením prvých dvoch cifier vzniklo trojciferné číslo, ktoré po delení siedmimi dáva zvyšok 3. Číslo, ktoré vznikne prehodením posledných dvoch cifier pôvodného čísla, dáva po delení siedmimi zvyšok 5. Aký zvyšok po delení siedmimi bude mať číslo, ktoré vznikne prehodením prvej a poslednej cifry Daninho čísla? (*Pavel Novotný*)

B – I – 5

V rovine sú dané body A, T, U tak, že uhol ATU je tupý. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom T, U sú postupne body dotyku strany BC s kružnicou trojuholníku vpísanou a pripísanou. (Pripísanou kružnicou tu rozumieme kružnicu, ktorá sa okrem strany BC dotýka aj polpriamok opačných k polpriamkam BA a CA.) (*Šárka Gergelitsová*)

B – I – 6

Nájdite najmenšie reálne číslo r také, že tyč s dĺžkou 1 možno rozlámať na štyri časti dĺžky nanajvýš r tak, že sa zo žiadnych troch týchto častí nedá zložiť trojuholník. (*Ján Mazák*)

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Určte, akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať výraz $V = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$, ak reálne čísla a, b, c spĺňajú dvojicu podmienok

$$\begin{aligned} a \; + 3b + c &= 6,\\ -a + b - c &= 2. \end{aligned}$$

(*Jaroslav Švrček*)

C – I – 2

V rovine sú dané body A, P, T neležiace na jednej priamke. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby P bola päta jeho výšky z vrcholu A a T bod dotyku strany AB s kružnicou jemu vpísanou. Uveďte diskusiu o počte riešení vzhľadom na polohu daných bodov. (*Pavel Leischner*)

C – I – 3

Číslo n je súčinom troch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme dve menšie z nich o 1 a najväčšie ponecháme nezmenené, zväčší sa ich súčin o 915. Určte číslo n. (*Pavel Novotný*)

C – I – 4

Vo štvorci $ABCD$ označme K stred strany AB a L stred strany AD. Úsečky KD a LC sa pretínajú v bode M a rozdeľujú štvorec na dva trojuholníky a dva štvoruholníky. Vypočítajte ich obsahy, ak úsečka LM má dĺžku 1 cm. (*Leo Boček*)

C – I – 5

Dokážte, že pre každé nepárne prirodzené číslo n je súčet $n^4 + 2n^2 + 2\,013$ deliteľný číslom 96. (*Jaromír Šimša*)

C – I – 6

Šachového turnaja sa zúčastnilo 8 hráčov a každý s každým odohral jednu partiu. Za víťazstvo získal hráč 1 bod, za remízu pol bodu, za prehru žiadny bod. Na konci turnaja mali všetci účastníci rôzne počty bodov. Hráč, ktorý skončil na 2. mieste, získal rovnaký počet bodov ako poslední štyria dokopy. Určte výsledok partie medzi 4. a 6. hráčom v celkovom poradí. (*Vojtech Bálint*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

63. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh:	RNDr. Vojtech Bálint, CSc., doc. RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Pavel Calábek, PhD., RNDr. Šárka Gergelitsová, PhD., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., Mgr. Pavel Leischner, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD., doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., Mgr. Michal Rolínek, Bc. Stanislava Sojáková, doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.
Recenzenti:	doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD., doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc.
Redakčná úprava:	RNDr. Tomáš Jurík, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013