SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

63. ročník, školský rok 2013/2014

Domáce kolo

Kategórie A, B, C – zadania úloh (maďarská verzia)

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 63. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.

Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.

Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.

Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **2. decembra 2013** (kategória **A**) a do **13. januára 2014** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X a práve traja žiaci (vrátane X) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2014 v Južnej Afrike), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2014 v Poľsku) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude v septembri 2014 v Nemecku).

Pre najlepších riešiteľov MO kategórie **C** sa v máji 2014 uskutoční Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Výber slovenského družstva prebehne nasledovne: Riešenia najlepších riešiteľov krajského kola kategórie C budú centrálne zozbierané a jednotne ohodnotené. Podľa poradia po tomto ohodnotení budú oslovení prví šiesti s ponukou účasti na súťaži (v prípade rovnosti bodov sa ako doplňujúce kritérium môže brať do úvahy účasť vo vyššej kategórii MO, účasť v korešpondenčnom seminári, či účasť v Z9 v predošlom šk. roku).

Termíny 63. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	10. 12. 2013	14. 01. 2014	23. – 26. 03. 2014
Kategórie B, C	23. 01. 2014	08. 04. 2014	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera, Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2013/2014
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
http://www.olympiady.sk   http://skmo.sk   http://matematika.okamzite.eu
http://fpedas.uniza.sk/~novotny/MO.htm   http://www.imo-official.org

---

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je kategória BETA. Pre tých, ktorí majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený korešpondenčný seminár *i*KS, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o *i*KS nájdete na http://kms.sk a http://iksko.org.

Na ďalšiu spoluprácu sa tešia

Bc. Jozef Jakubík, Filip Sládek

A KATEGÓRIA

A – I – 1

Az n szám három (nem feltétlenül különböző) prímszám szorzata. Ha ezen számok mindegyikét eggyel növeljük, akkor a szorzatuk 963-mal nő. Határozd meg az n eredeti értékét!

(*Pavel Novotný*)

A – I – 2

Bizonyítsd be, hogy tetszőleges x, y, z pozitív valós számokra fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$(x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big) \leqq m^2, \quad \text{ahol } m = \min\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}, \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\Big).$$

Állapítsd meg, mikor áll fenn egyenlőség!

(*Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša*)

A – I – 3

Jelölje I az ABC háromszög beírt körének középpontját. Tegyük fel, hogy a CI egyenesre I-n keresztül húzott merőleges az AB egyenest az M pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög körülírt köre a CM szakaszt egy belső N pontjában metszi, valamint, hogy az NI és MC egyenesek egymásra merőlegesek!

(*Peter Novotný*)

A – I – 4

Jelölje $l(n)$ az n szám legnagyobb páratlan osztóját. Határozd meg az

$$l(1) + l(2) + l(3) + \cdots + l(2^{2013})$$

összeg értékét!

(*Michal Rolínek*)

A – I – 5

Hány különböző módon lehet kicsempézni egy 3×10-es felületet 2×1-es méretű csempékkel, ha a csempéket csak a felület széleire merőlegesen rakhatjuk le?

(*Stanislava Sojáková*)

A – I – 6

Adott egy ABC háromszög. Határozd meg a síkjában az összes olyan pontot, amelynek vetületei az AB, BC, CA tengelyek szerinti tengelyes tükrözésben egy egyenlő oldalú háromszöget alkotnak!

(*Pavel Calábek*)

63 MO

MATEMATIKA OLIMPIA

63-ik évfolyam 2013/2014-es tanév Házi forduló

****

B KATEGÓRIA

B – I – 1

Egy szabályos 63-szög minden csúcsához hozzárendeljük az 1 vagy a -1 valamelyikét. Ezután minden oldalához hozzáírjuk a rajta lévő csúcsokhoz rendelt számok szorzatát, és végül az oldalakhoz írt számokat összeadjuk. Mennyi az így kapott összeg lehető legkisebb nemnegatív értéke? (*Pavel Calábek*)

B – I – 2

Keresd meg az összes olyan (x, y) valós számpárt, amelyre fennáll az

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geqq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2$$

egyenlőtlenség! (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 3

Legyen D az ABC háromszög AB oldalának egy tetszőleges belső pontja. A BC és AC félegyeneseken vegyük fel rendre az E és F pontokat úgy, hogy teljesüljön a $|BD| = |BE|$ és $|AD| = |AF|$ egyenlőség. Bizonyítsd be, hogy a C, E, F pontok, valamint az ABC háromszög beírt körének I középpontja egy körvonalon fekszenek! (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 4

Dana egy papírra felírt egy olyan háromjegyű számot, melynek héttel való osztási maradéka 2. Az első két számjegy felcserélésével egy olyan háromjegyű szám keletkezik, melynek héttel való osztási maradéka 3. Az eredeti szám utolsó két számjegyének felcserélésével pedig egy olyan háromjegyű szám keletkezik, melynek héttel való osztási maradéka 5. Határozd meg, milyen maradékot ad héttel való osztás után az a szám, amely az eredeti szám első és utolsó számjegyének felcserélésével keletkezik! (*Pavel Novotný*)

B – I – 5

A síkban adottak az A, T, U pontok úgy, hogy az ATU szög tompa. Szerkeszd meg azt az ABC háromszöget, amelynek beírt, illetve hozzáírt köre a BC oldalat a T, ill. U pontokban érinti! (Hozzáírt kör alatt itt azt a körvonalat értjük, amelyik a BC oldalon kívül érinti a BA és CA-val ellentétes félegyeneseket is.) (*Šárka Gergelitsová*)

B – I – 6

Keressétek meg azt a legkisebb r valós számot, amelyre egy egységnyi hosszúságú rúd, négy legfeljebb r hosszúságú darabra törhető úgy, hogy semelyik három darabból se lehessen összeállítani egy háromszöget! (*Ján Mazák*)

C KATEGÓRIA

C – I – 1

Határozd meg a $V = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ kifejezés lehető legkisebb értékét, ha a, b és c olyan valós számok, amelyek kielégítik az

$$\begin{aligned} a \ +3b+c &= 6, \\ -a+b-c &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert! (*Jaroslav Švrček*)

C – I – 2

A síkban adottak az A, P és T pontok, melyek nem fekszenek egy egyenesen. Szerkeszd meg azt az ABC háromszöget, amelynek beírt köre az AB oldalat a T pontban érinti, P pedig az A csúcsból húzott magasságvonal talppontja! Végezd el a diszkussziót a lehetséges megoldások számáról a megadott pontok helyzetének függvényében! (*Pavel Leischner*)

C – I – 3

Az n szám három különböző prímszám szorzata. Ha a legnagyobbat nem változtatjuk és a két kisebbet 1-el növeljük, akkor a szorzatuk 915-tel nő. Határozd meg n értékét! (*Pavel Novotný*)

C – I – 4

Az $ABCD$ négyzetben jelölje rendre K, ill. L az AB, ill. AD oldal középpontját. A KD és LC szakaszok egymást az M pontban metszik és a négyzetet két háromszögre és két négyszögre bontják. Számítsd ki a területeiket, ha tudod, hogy az LM szakasz 1 cm hosszúságú!

(*Leo Boček*)

C – I – 5

Bizonyítsd be, hogy minden páratlan n természetes számra az $n^4 + 2n^2 + 2\,013$ összeg osztható 96-tal! (*Jaromír Šimša*)

C – I – 6

Egy sakkbajnokságon nyolc induló volt, és mindenki mindenki ellen pontosan egy partit játszott. A győzelem 1 pontot, a döntetlen fél pontot ért, vereségért pedig nem járt pont. A bajnokság végén mindenkinek más-más pontszáma volt. Az a versenyző, aki a második lett, pontosan ugyanannyi pontot gyűjtött, mint az utolsó négy helyen végzett versenyző összesen. Határozd meg, hogy milyen eredménnyel zárult a 4. és 6. helyezett versenyző közötti parti!

(*Vojtech Bálint*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

63. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh:	RNDr. Vojtech Bálint, CSc., doc. RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Pavel Calábek, PhD., RNDr. Šárka Gergelitsová, PhD., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., Mgr. Pavel Leischner, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD., doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., Mgr. Michal Rolínek, Bc. Stanislava Sojáková, doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.
Recenzenti:	doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD., doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc.
Redakčná úprava:	RNDr. Tomáš Jurík, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.
Preklad:	Mgr. Štefan Gyürki, PhD., doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013