63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014 *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

---

1. *Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geqq 3$ je $2n$-ciferné číslo s dekadickým zápisom*

$$\underbrace{1\ldots1}_{n-1}2\underbrace{8\ldots8}_{n-2}96$$

druhou mocninou niektorého celého čísla. (*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Zadané číslo má vyjadrenie

$$\begin{aligned}
&(10^{2n-1}+10^{2n-2}+\ldots+10^{n+1})+2\cdot10^n+8\cdot(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10^2)+96=\\
&\quad=10^{n+1}\cdot\frac{10^{n-1}-1}{9}+2\cdot10^n+8\cdot10^2\cdot\frac{10^{n-2}-1}{9}+96=\\
&\quad=\frac{10^{2n}-10^{n+1}+18\cdot10^n+800\cdot10^{n-2}-800+9\cdot96}{9}=\\
&\quad=\frac{10^{2n}+16\cdot10^n+64}{9}=\Big(\frac{10^n+8}{3}\Big)^2.
\end{aligned}$$

Získali sme druhú mocninu celého čísla, pretože číslo 10^n+8 je deliteľné tromi – má totiž ciferný súčet rovný 9. (Namiesto toho možno tiež konštatovať, že keby zlomok $\frac{10^n+8}{3}$ nebol celým číslom, nebola by celým číslom ani jeho druhá mocnina, a to by bol spor.)

Iné riešenie. Ak objavíme experimentovaním niekoľko prvých rovností (neuškodí uvedomiť si, že vzorec funguje aj pre $n=2$)

$$1\,296=36^2,\quad 112\,896=336^2,\quad 11\,128\,896=3\,336^2,\quad \ldots,$$

napadne nás určite hypotéza, že pre každé $n \geqq 2$ bude platiť

$$\underbrace{1\ldots1}_{n-1}2\underbrace{8\ldots8}_{n-2}96=\underbrace{33\ldots3}_{n-1}6^2.$$

Jej dôkaz urobíme použitím algoritmu písomného násobenia:

$$\begin{array}{r}
333\ldots3336\\
\times333\ldots3336\\
\hline
2000\ldots0016\\
10000\ldots008\\
100000\ldots08\\
1000000\ldots8\\
\vdots\qquad\qquad\\
1\ldots000008\\
10\ldots00008\\
100\ldots0008\\
\hline
111\ldots112888\ldots8896
\end{array}$$

Obe rovnaké násobené čísla sú n-ciferné, v každom z n riadkov medzi oddeľujúcimi linkami je $(n+1)$-ciferné číslo. Z toho ľahko určíme, ako stoja pod sebou cifry týchto následne sčítaných čísel, a teda aj počty rovnakých cifier vo výsledku.

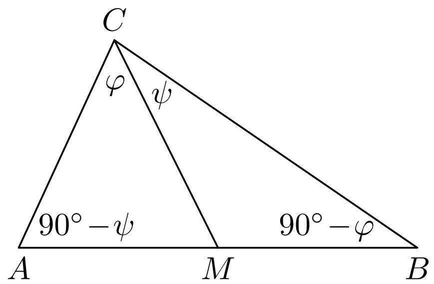
Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Pri druhom postupe dajte 2 body za určenie základu $33\dots36$ druhej mocniny a 4 body za schému jej písomného výpočtu so všeobecným n. Ak riešiteľ tieto výpočty písomne urobí aspoň pre $n=3$ a potom spomenie analógiu bez podrobnejšieho opisu, dajte celkom 5 bodov. Ak chýbajú písomné výpočty a riešiteľ sa namiesto nich odvolá na (zakázanú) kalkulačku, neudeľujte žiadny bod.

---

2. *Označme M stred strany AB ľubovoľného trojuholníka ABC. Dokážte, že rovnosť $|\measuredangle ABC| + |\measuredangle ACM| = 90°$ platí práve vtedy, keď je trojuholník ABC rovnoramenný so základňou AB alebo pravouhlý s preponou AB.* (*Pavel Novotný*)

Riešenie. V prvej časti riešenia budeme predpokladať, že $|\measuredangle ABC| + |\measuredangle ACM| = 90°$. Pri označení $\varphi = |\measuredangle ACM|$ a $\psi = |\measuredangle BCM|$ (obr. 1) je potom splnená nielen rovnosť $|\measuredangle ABC| = 90° - \varphi$, ale aj rovnosť $|\measuredangle BAC| = 90° - \psi$, ako vyplýva zo súčtu uhlov v trojuholníku ABC:

$$\begin{aligned}|\measuredangle BAC| &= 180° - |\measuredangle ABC| - |\measuredangle ACB| = \\ &= 180° - (90° - \varphi) - (\varphi + \psi) = 90° - \psi.\end{aligned}$$



Obr. 1

Zo sínusovej vety pre trojuholníky ACM a BCM tak vyplýva

$$\frac{\sin(90° - \psi)}{\sin\varphi} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|CM|}{|BM|} = \frac{\sin(90° - \varphi)}{\sin\psi}.$$

Z porovnania krajných zlomkov vzhľadom na vzorec $\sin(90° - \omega) = \cos\omega$ vyplýva rovnosť $\sin\varphi\cos\varphi = \sin\psi\cos\psi$, čiže $\sin 2\varphi = \sin 2\psi$. Keďže uhly φ a ψ sú ostré, oba uhly 2φ a 2ψ ležia v intervale od $0°$ po $180°$. Podľa známych vlastností funkcie sínus rovnosť $\sin 2\varphi = \sin 2\psi$ tak znamená, že buď $2\varphi = 2\psi$, alebo $2\varphi + 2\psi = 180°$. V prvom prípade ($\varphi = \psi$) je trojuholník ABC rovnoramenný so základňou AB, v druhom prípade ($\varphi + \psi = 90°$) je pravouhlý s preponou AB. Tým je dokázaná prvá (náročnejšia) z dvoch implikácií, z ktorých je zložená ekvivalencia zo zadania úlohy.

Pri dôkaze druhej (jednoduchšej) implikácie najskôr predpokladajme, že trojuholník ABC je pravouhlý s preponou AB. Podľa Tálesovej vety vtedy platí $|MB| = |MC|$, a tak sú zhodné uhly MCB a MBC (čiže ABC), odkiaľ už vyplýva

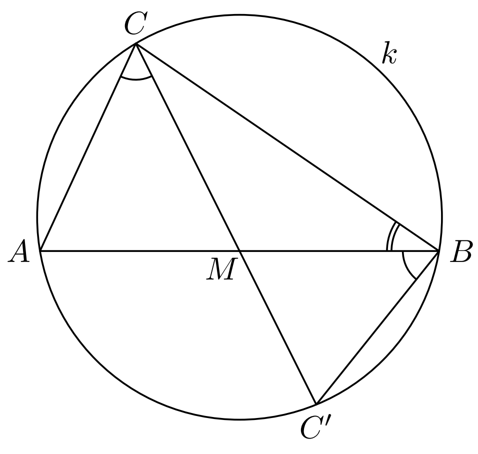
$$|\measuredangle ABC| + |\measuredangle ACM| = |\measuredangle MCB| + |\measuredangle ACM| = |\measuredangle ACB| = 90°.$$

Ostáva dokázať rovnakú rovnosť aj za predpokladu, že trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou AB. Vtedy však sú trojuholníky ACM a BCM zhodné a majú pri vrchole M pravý uhol, takže platí

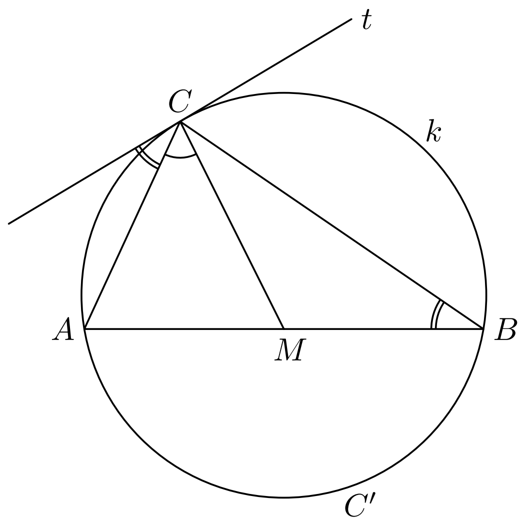
$$|\measuredangle ABC| + |\measuredangle ACM| = |\measuredangle MBC| + |\measuredangle BCM| = 180° - |\measuredangle BMC| = 90°.$$

Tým je aj dôkaz druhej implikácie ukončený a celá úloha je vyriešená.

Iné riešenie. Zostrojme kružnicu k opísanú danému trojuholníku ABC a jeho ťažnicu CM predĺžme za bod M na tetivu CC' kružnice k (obr. 2). Zo zhodnosti obvodového uhla ABC' s obvodovým uhlom ACC' (čiže uhlom ACM) vyplýva, že súčet uhlov ABC a ACM zo zadania úlohy má rovnakú veľkosť ako uhol CBC'. Podľa Tálesovej vety je táto veľkosť rovná $90°$ práve vtedy, keď tetiva CC' kružnice k je jej priemerom. To nastane práve vtedy, keď stred S kružnice k bude ležať na polpriamke CM. Pre takú situáciu rozlíšime prípady $S = M$ a $S \neq M$. Prvý prípad podľa Tálesovej vety nastane práve vtedy, keď bude trojuholník ABC pravouhlý s preponou AB. Druhý prípad (C, M a S sú tri rôzne body ležiace na jednej priamke) nastane práve vtedy, keď bude priamka MS, ktorá je osou úsečky AB, prechádzať bodom C, teda práve vtedy, keď bude trojuholník ABC rovnoramenný so základňou AB (a pritom uhol ACB nebude pravý). Tým je dokázaná celá ekvivalencia zo zadania úlohy.



Obr. 2



Obr. 3

Poznámka. V predchádzajúcom postupe bolo možné namiesto tetivy CC' kružnice k využiť jej dotyčnicu t v bode C (obr. 3). Zo zhodnosti obvodového uhla ABC s vyznačeným úsekovým uhlom medzi tetivou AC a dotyčnicou t totiž vyplýva, že súčet uhlov ABC a ACM je rovný $90°$ práve vtedy, keď je dotyčnica t kolmá na polpriamku CM, teda práve vtedy, keď na tejto polpriamke leží stred S kružnice k.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 5 bodov za prvú (náročnejšiu) implikáciu a 1 bod za oba prípady druhej (jednoduchšej) implikácie.

3. *Dĺžky strán pravouholníka sú celé čísla x a y väčšie ako 1. V pravouholníku vyznačíme rozdelenie na $x \cdot y$ jednotkových štvorcov a potom z neho zvinutím a zlepením dvoch protiľahlých strán zhotovíme plášť rotačného valca. Každé dva vrcholy jednotkových štvorcov na plášti spojíme úsečkou. Koľko z týchto úsečiek prechádza vnútornými bodmi tohto valca? V prípade $x > y$ rozhodnite, kedy bude tento počet väčší – keď bude obvod podstavy valca rovný x, alebo y?* (*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Hľadaný počet úsečiek, ktoré prechádzajú vnútornými bodmi valca, určíme tak, že od celkového počtu zostrojených úsečiek odčítame jednak počet tých úsečiek, ktoré ležia na plášti valca, jednak počet tých úsečiek, ktoré ležia v niektorej z oboch podstáv valca.

Výpočet urobíme pre prípad valca s obvodom podstavy x a výškou y. Spájané body sú teda na valci rozložené na x úsečkách po $y+1$ exemplároch, takže ich počet je $x(y+1)$. Pre počet P_0 všetkých zostrojených úsečiek preto platí vzorec

$$P_0 = \binom{x(y+1)}{2} = \frac{x(y+1)(xy+x-1)}{2},$$

počet P_1 úsečiek ležiacich na plášti má vyjadrenie

$$P_1 = x \cdot \binom{y+1}{2} = \frac{x(y+1)y}{2}$$

a napokon počet P_2 úsečiek v oboch podstavách je daný vzorcom

$$P_2 = 2 \cdot \binom{x}{2} = x(x-1).$$

Z toho už pre hľadaný počet P úsečiek, ktoré prechádzajú vnútornými bodmi valca, dostaneme vzorec

$$\begin{aligned} P = P_0 - P_1 - P_2 &= \frac{x(y+1)(xy+x-1)}{2} - \frac{x(y+1)y}{2} - x(x-1) = \\ &= \frac{x(x-1)(y^2+2y-1)}{2}. \end{aligned}$$

Pre zodpovedajúci počet Q úsečiek, ktoré prechádzajú vnútornými bodmi druhého valca s obvodom podstavy y a výškou x, zrejme platí analogický vzorec

$$Q = \frac{y(y-1)(x^2+2x-1)}{2}.$$

Pre porovnanie oboch počtov P a Q upravíme ich rozdiel $P-Q$ (s vedomím, že ten bude násobkom dvojčlena $x-y$, pretože pre $x=y$ zrejme platí $P=Q$):

$$\begin{aligned} 2(P-Q) &= (x^2-x)(y^2+2y-1) - (y^2-y)(x^2+2x-1) = \\ &= (x^2y^2 - xy^2 + 2x^2y - 2xy - x^2 + x) - \\ &\quad - (x^2y^2 - x^2y + 2xy^2 - 2xy - y^2 + y) = \\ &= 3xy(x-y) - (x-y)(x+y) + (x-y) = \\ &= (x-y)(3xy - x - y + 1). \end{aligned}$$

V prípade $x > y$ ako väčšie vyjde číslo P, pretože ukážeme, že výraz $3xy-x-y+1$ je kladný: z $y \geqq 2$ máme $3xy \geqq 6x$, a preto

$$3xy - x - y + 1 \geqq 5x - y + 1 > 4x + 1 > 0.$$

Poznámka. Opíšme kratší spôsob určenia hľadaného počtu úsečiek, a to opäť pre valec s obvodom podstavy x a výškou y.

Kolmým priemetom každej započítanej úsečky do podstavy je jedna z $\frac{1}{2}x(x-1)$ úsečiek, ktoré spájajú x bodov na hraničnej kružnici. Do jednej z týchto úsečiek sa vždy premietne $(y+1)^2 - 2 = y^2 + 2y - 1$ započítaných úsečiek, pretože $y+1$ je počet spájaných bodov s rovnakým priemetom a od súčinu $(y+1)(y+1)$ treba odčítať číslo 2 za dve spojnice ležiace v podstavách. Hľadaný počet P je teda rovný

$$P = \frac{x(x-1)(y^2+2y-1)}{2}.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 4 body za určenie počtu úsečiek s bodmi vnútri valca a ďalšie 2 body potom za zdôvodnenie, ktorý z oboch počtov je väčší. Prvé 4 body sa dajú čiastkovo udeľovať takto: po 1 bode za určenie čísel P_0, P_1, P_2 a 1 bod za správne výsledné dopočítanie P.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe tak, aby zásielka bola doručená pred Vianocami. Odporúča sa odoslať ich najneskôr 16. decembra 1. triedou.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013