63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie A*

1. *Číslo n je súčinom troch (nie nutne rôznych) prvočísel. Keď zväčšíme každé z nich o 1, zväčší sa ich súčin o 963. Určte pôvodné číslo n.* (Pavel Novotný)

Riešenie. Hľadáme $n = p \cdot q \cdot r$ s prvočíslami $p \leqq q \leqq r$, ktoré spĺňajú rovnosť

$$(p+1)(q+1)(r+1) = pqr + 963. \tag{1}$$

Jej pravá strana je v prípade najmenšieho prvočísla $p = 2$ nepárne číslo, takže potom i činitele $q+1$ a $r+1$ zo súčinu na ľavej strane musia byť nepárne čísla. Pre prvočísla q, r to znamená, že $q = r = 2$, ale trojica $p = q = r = 2$ rovnosti (1) nevyhovuje. Platí teda $p \geqq 3$.

Ukážeme teraz, že nutne platí $p = 3$. V opačnom prípade sú všetky tri prvočísla p, q, r väčšie ako 3, a preto ani súčin pqr, a teda ani pravá strana (1) nie sú čísla deliteľné tromi (číslo 963 je totiž násobkom troch). Z podmienky, že súčin $(p+1)(q+1)(r+1)$ z ľavej strany (1) nie je deliteľný tromi, ale vyplýva, že žiadne z prvočísel p, q, r nemôže dávať po delení tromi zvyšok 2. A keďže zvyšok 0 je v uvažovanom prípade vylúčený, môžu prvočísla p, q, r dávať pri delení tromi jedine zvyšok 1. Odtiaľ ďalej dostávame, že rozdiel $(p+1)(q+1)(r+1) - pqr$ dáva po delení tromi rovnaký zvyšok ako číslo $2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 7$, teda zvyšok 1. To je ale spor, lebo podľa (1) platí $(p+1)(q+1)(r+1) - pqr = 963$. Rovnosť $p = 3$ je tak dokázaná.

Po dosadení $p = 3$ do (1) dostaneme rovnosť $4(q+1)(r+1) = 3qr + 963$, ktorú postupne upravíme na „súčinový" tvar:

$$\begin{aligned} 4qr + 4q + 4r + 4 &= 3qr + 963, \\ qr + 4q + 4r &= 959, \\ (q+4)(r+4) &= 975. \end{aligned}$$

Číslo 975 má prvočíselný rozklad $975 = 3 \cdot 5^2 \cdot 13$, takže vzhľadom na nerovnosti $3 \leqq q \leqq r$ čiže $7 \leqq q+4 \leqq r+4$ pre menší činiteľ z odvodeného rozkladu musí platiť $q + 4 \leqq \sqrt{975} < 32$, preto $q + 4 \in \{13, 15, 25\}$. To spĺňa jediné prvočíslo $q = 11$, pre ktoré $q + 4 = 15$. Pre druhý činiteľ tak máme $r + 4 = 5 \cdot 13 = 65$, odtiaľ $r = 61$, čo je naozaj prvočíslo. Hľadané číslo $n = p \cdot q \cdot r$ je teda jediné a má hodnotu

$$n = 3 \cdot 11 \cdot 61 = 2\,013.$$

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Číslo n je súčinom štyroch prvočísel. Ak každé z týchto prvočísel zväčšíme o 1 a vzniknuté štyri čísla vynásobíme, dostaneme číslo o 2 886 väčšie ako pôvodné číslo n. Určte všetky také n. [59–B–II–4]

N2. Zistite, kedy pre tri prvočísla p, q, r má rozdiel $(p+1)(q+1)(r+1) - pqr$ hodnotu, ktorá po delení šiestimi dáva zvyšok 3. [Jedno z prvočísel p, q, r sa rovná trom, druhé je tvaru $6k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$, a tretie je ľubovoľné nepárne prvočíslo. (Úvaha A: Keby bol súčin pqr párny, musel by byť súčin $(p+1)(q+1)(r+1)$ nepárny, takže by muselo byť $p = q = r = 2$. Úvaha B: Keby nebol súčin pqr deliteľný tromi, nebol by taký ani súčin $(p+1)(q+1)(r+1)$, takže čísla p, q, r by dávali po delení číslom 3 zvyšok 1 a uvažovaný rozdiel by tak dával zvyšok 2. Z úvah A a B už ľahko vyplýva vyššie uvedená odpoveď.)]

N3. Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré platí
a) $p + q^2 = q + 145p^2$, [55–C–II–4]
b) $p + q^2 = q + p^3$. [55–B–II–1]

N4. Určte, pre ktoré trojice navzájom rôznych prvočísel p, q, r platí súčasne: $p \mid q + r$, $q \mid r + 2p$, $r \mid p + 3q$. [55–A–III–5]

N5. Určte všetky trojice (p, q, r) prvočísel, pre ktoré platí: $(p + 1)(q + 2)(r + 3) = 4pqr$. [60–A–III–2]

---

2. *Pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y, z dokážte nerovnosť*

$$(x + y + z)\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big) \leqq m^2, \quad \text{pričom } m = \min\Big(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\Big).$$

Zistite tiež, kedy v dokázanej nerovnosti nastane rovnosť.

(*Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša*)

Riešenie. Keďže v dokazovanej nerovnosti vystupuje minimum z dvoch kladných čísel a funkcia $y = x^2$ je na množine kladných čísel rastúca, je našou úlohou overiť dvojicu nerovností

$$(x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big) \leqq \Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\Big)^2 \text{ a } (x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big) \leqq \Big(\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}\Big)^2 \quad (1)$$

a zistiť, kedy v *aspoň jednej* z nich nastane rovnosť (práve vtedy totiž nastane rovnosť aj v pôvodnej nerovnosti). Druhú nerovnosť v (1) ale zrejme dostaneme z prvej, keď trojicu (x, y, z) zameníme trojicou (y, x, z). Stačí preto overiť, že pre ľubovoľnú trojicu (x, y, z) kladných čísel platí prvá nerovnosť

$$(x + y + z)\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big) \leqq \Big(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\Big)^2,$$

a zistiť, kedy v nej nastane rovnosť. Po roznásobení oboch strán dostaneme

$$3 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} \leqq \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + 2\Big(\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}\Big).$$

Takú nerovnosť bude zrejme výhodné zapísať v nových (opäť kladných) premenných $a = x/y$, $b = y/z$, $c = z/x$. Dostaneme tak ekvivalentnú nerovnosť

$$3 + a + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + b + c + \frac{1}{b} \leqq a^2 + b^2 + c^2 + 2\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big),$$

ktorú ešte upravíme na tvar so súčtom troch hodnôt toho istého výrazu

$$\Big(a^2 - 1 - a + \frac{1}{a}\Big) + \Big(b^2 - 1 - b + \frac{1}{b}\Big) + \Big(c^2 - 1 - c + \frac{1}{c}\Big) \geqq 0. \quad (2)$$

Vďaka tomu, že a, b, c sú kladné čísla a že uvedený výraz má vyjadrenie

$$t^2 - 1 - t + \frac{1}{t} = (t^2 - 1) - \frac{t^2 - 1}{t} = \frac{(t^2 - 1)(t - 1)}{t} = \frac{(t - 1)^2(t + 1)}{t},$$

upravená nerovnosť (2) platí a rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $a = b = c = 1$, čo pre pôvodné premenné x, y, z znamená práve to, že $x = y = z$. Táto podmienka je ale rovnaká i pre rovnosť v druhej nerovnosti (1) (ak chceme byť dôslední, má tvar $y = x = z$). Preto i rovnosť v pôvodnej dokazovanej nerovnosti nastane jedine v prípade, keď $x = y = z$.

Dodajme, že na dôkaz (1) sme vlastne ani nevyužili vzťah $abc = 1$, ktorý novo zavedené premenné a, b, c spĺňajú.

Návodné a doplňujúce úlohy:

Pripomeňme najskôr známe tvrdenie o nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom (stručne nazývanej AG-nerovnosťou): *Pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *platí*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n};$$

pritom rovnosť nastane jedine v prípade $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

N1. Pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y, z dokážte nerovnosti

$$\min\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right) \geqq 3 \quad \text{a} \quad (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqq 9.$$

[Prvá nerovnosť je dôsledkom toho, že nerovnosť $a + b + c \geqq 3$ platí pre každú trojicu kladných čísel a, b, c spĺňajúcich podmienku $abc = 1$ (využite pre takú trojicu AG-nerovnosť). Druhú nerovnosť dostaneme, keď medzi sebou vynásobíme dve AG-nerovnosti zapísané pre trojice čísel (x, y, z) a $(1/x, 1/y, 1/z)$.]

N2. Pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y, z dokážte

$$\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{x}\right) \geqq 8$$

a zistite, kedy nastane rovnosť. [55–B–S–1]

N3. Dôsledkom nerovnosti zo súťažnej úlohy je (slabšia) nerovnosť

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leqq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right).$$

Spravte jej priamy dôkaz (pre ľubovoľné $x, y, z > 0$), skôr ako začnete riešiť súťažnú úlohu. [Roznásobením zátvoriek na ľavej strane dostaneme výraz $3 + A + B$, kde $A = x/y + y/z + z/x$ a $B = y/x + x/z + z/y$ sú činitele z pravej strany. Máme tak dokázať nerovnosť $3 + A + B \leqq AB$; v súťažnej úlohe ide o silnejšiu nerovnosť $3 + A + B \leqq \left(\min(A, B)\right)^2$. Nerovnosť $3 + A + B \leqq AB$ upravíme na súčinový tvar $(A-1)(B-1) \geqq 4$ a všimneme si, že podľa návodnej úlohy 1 platí $A \geqq 3$ a $B \geqq 3$, čiže $A - 1 \geqq 2$ a $B - 1 \geqq 2$. Vynásobením posledných dvoch nerovností dostaneme potrebné.]

N4. Pri riešení súťažnej úlohy je možné (ak nie dokonca nevyhnutné) uplatniť častý užitočný obrat, kedy určitú nerovnosť zdôvodníme sčítaním niekoľkých (v danom prípade troch) analogických nerovností. Využite to na určenie najmenšej hodnoty výrazu

$$V = a^2 + b^2 + c^2 + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

kde a, b, c sú ľubovoľne kladné reálne čísla. [$V_{\min} = 9$ pre $a = b = c = 1$. Podľa AG-nerovnosti použitej na trojicu čísel t^2, $1/t$, $1/t$ pre každé $t \geqq 3$ platí $t^2 + 2/t \geqq 3$. Sčítaním takých nerovností pre $t = a$, $t = b$ a $t = c$ dostaneme potrebný odhad $V \geqq 9$.]

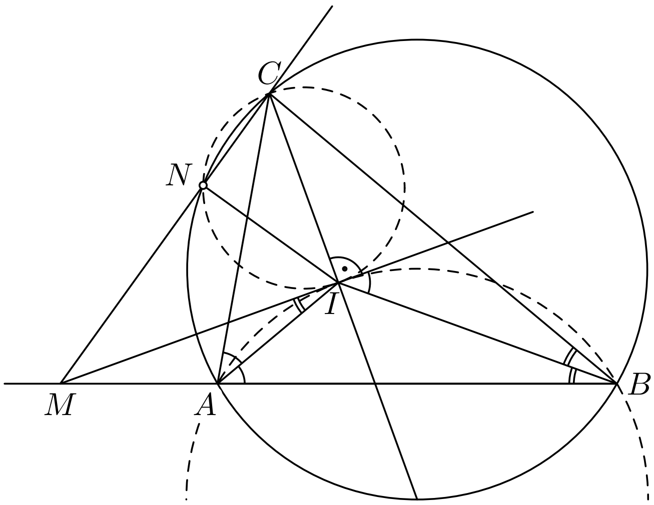
N5. Určte všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel, pre ktoré platí

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 6 + \min\left(x^2 - \frac{8}{x^4}, y^2 - \frac{8}{y^4}, z^2 - \frac{8}{z^4}\right).$$

[53–A–III–1]

3. *Označme I stred kružnice vpísanej do daného trojuholníka ABC. Predpokladajme, že kolmica na priamku CI vedená bodom I pretína priamku AB v bode M. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku ABC pretína úsečku CM v jej vnútornom bode N a že priamky NI a MC sú navzájom kolmé.* (Peter Novotný)

Riešenie. Ukážeme najskôr dvoma spôsobmi, že priamka MI, teda kolmica na priamku CI v bode I, je dotyčnicou ku kružnici ABI (tak budeme označovať kružnice prechádzajúce tromi danými bodmi). Prvý postup založíme na známom poznatku, že AIC a BIC sú tupé uhly veľkostí $90° + \frac{1}{2}\beta$, resp. $90° + \frac{1}{2}\alpha$ (návodná úloha 1). Preto skúmaná kolmica MI na priamku CI zviera s úsečkami AI a BI ostré uhly $\frac{1}{2}\beta$, resp. $\frac{1}{2}\alpha$,[1] teda uhly zhodné s obvodovými uhlami IBA, resp. IAB v kružnici ABI (obr. 1). To už podľa vety o zhodnosti obvodových a úsekových uhlov znamená práve to, že priamka MI je dotyčnicou kružnice ABI. Rovnaký záver vyplýva okamžite aj z poznatku, že stredom kružnice ABI je stred toho oblúka AB kružnice ABC, ktorý neobsahuje vrchol C a ktorým prechádza priamka CI (os vnútorného uhla pri vrchole C trojuholníka ABC, návodná úloha 2).



Obr. 1

Z dokázaného dotyku priamky MI s kružnicou ABI vyplýva, že bod M leží na priamke AB mimo úsečky AB a má ku kružnici ABI kladnú mocnosť m, ktorá má dvojaké vyjadrenie $m = |MI|^2 = |MA| \cdot |MB|$. Bod M preto leží i vo vonkajšej oblasti kružnice ABC (lebo úsečka AB je jej tetiva) a má k nej takú istú mocnosť $m = |MA| \cdot |MB|$. Tá istá hodnota $m = |MI|^2$ je ale menšia ako $|MC|^2$, čo vyplýva z pravouhlého trojuholníka CMI. Nerovnosť $|MC|^2 > m$ tak znamená, že polpriamka MC má s kružnicou ABC okrem bodu C spoločný ešte jeden bod N, ktorý navyše leží medzi bodmi M a C (lebo z rovnosti $|MC| \cdot |MN| = m$ vyplýva nerovnosť $|MN| < |MC|$). Prvá časť tvrdenia úlohy je tak dokázaná.

Našou druhou úlohou je ukázať, že uhol CNI je pravý. K tomu na dokázanú rovnosť $|MC| \cdot |MN| = |MI|^2$ môžeme uplatniť nasledovné „obrátenie“ Euklidovej

[1] Z určených uhlov medzi priamkou MI a úsečkami AI a BI vyplýva, že bod M (ktorého existencia sa v zadaní úlohy predpokladá) skutočne existuje práve vtedy, keď platí $\frac{1}{2}\alpha \neq \frac{1}{2}\beta$ čiže $\alpha \neq \beta$. Vzhľadom na symetriu zadania môžeme predpokladať, že platí $\alpha > \beta$; bod M potom leží – ako na našom obrázku – na predĺžení strany AB za vrchol A a $|\measuredangle IMA| = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$.

vety o odvesne MI pravouhlého trojuholníka CMI. Päta jeho výšky z vrcholu I na preponu CM je taký bod X úsečky CM, ktorého poloha je (vďaka Euklidovej vete) jednoznačne určená rovnosťou $|MC| \cdot |MX| = |MI|^2$. Preto $X = N$ a dôkaz je hotový. Bez použitia Euklidovej vety je možné argumentovať takto: Keďže priamka MI sa v bode I dotýka Tálesovej kružnice zostrojenej nad priemerom CI, má bod M aj k tejto kružnici mocnosť $m = |MI|^2$, a preto na nej – vďaka rovnosti $m = |MC| \cdot |MN|$ – leží i bod N, takže uhol CNI je podľa Tálesovej vety naozaj pravý.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pomocou vnútorných uhlov α, β, γ všeobecného trojuholníka ABC s vpísanou kružnicou so stredom I vyjadrite veľkosti uhlov AIB, AIC, BIC. [Veľkosti sú postupne $90° + \frac{1}{2}\gamma$, $90° + \frac{1}{2}\beta$, $90° + \frac{1}{2}\alpha$. Vyplýva to zo súčtov vnútorných uhlov v jednotlivých trojuholníkoch AIB, AIC, BIC, lebo polpriamky AI, BI a CI sú osami vnútorných uhlov trojuholníka ABC.]

Pred riešením nasledujúcej úlohy si zopakujte učebnicové poznatky o stredových, obvodových a úsekových uhloch.

N2. Pre všeobecný trojuholník ABC s vpísanou kružnicou so stredom I dokážte, že polpriamka CI pretne oblúk AB kružnice opísanej v takom bode S, ktorý má od bodov A, B, I rovnakú vzdialenosť. [Rovnosť $|SA| = |SB|$ vyplýva z rovnosti obvodových uhlov ACS a BCS; rovnosť $|SA| = |SI|$ je dôsledkom toho, že v trojuholníku AIS majú oba vnútorné uhly pri vrcholoch A a I takú istú veľkosť rovnú $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$ čiže $90° - \frac{1}{2}\beta$.]

Zopakujte si ďalej učebnicový poznatok o všetkých sečniciach danej kružnice prechádzajúcich daným bodom, ktorý je vyjadrený veličinou nazývanou *mocnosť bodu ku kružnici*. Dobré poučenie a veľa ukážok použitia nájdete v článku T. Nedevová: *Mocnost bodu ke kružnici*, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 87 (2012), č. 2, str. 9–17.

N3. V rovine je daný pravouhlý lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a pravým uhlom pri vrchole A. Označme k_1 kružnicu zostrojenú nad stranou AD ako nad priemerom a k_2 kružnicu prechádzajúcu vrcholmi B, C a dotýkajúcu sa priamky AB. Ak majú kružnice k_1, k_2 vonkajší dotyk v bode P, je priamka BC dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku CDP. Dokážte. [52–B–II–4]

N4. Do kružnice k je vpísaný štvoruholník $ABCD$, ktorého uhlopriečka BD nie je priemerom. Dokážte, že priesečník priamok, ktoré sa kružnice k dotýkajú v bodoch B a D, leží na priamke AC práve vtedy, keď platí $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$. [51–A–II–3]

N5. Je daný rovnobežník $ABCD$ s tupým uhlom ABC. Na jeho uhlopriečke AC v polrovine BDC zvoľme bod P tak, aby platilo $|\measuredangle BPD| = |\measuredangle ABC|$. Dokážte, že priamka CD je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku BCP práve vtedy, keď úsečky AB a BD sú zhodné. [59–A–II–2]

N6. V trojuholníku ABC, ktorý nie je rovnostranný, označme K priesečník osi vnútorného uhla BAC so stranou BC a L priesečník osi vnútorného uhla ABC so stranou AC. Ďalej označme S stred kružnice vpísanej, O stred kružnice opísanej a V priesečník výšok trojuholníka ABC. Dokážte, že nasledujúce dve tvrdenia sú ekvivalentné:
a) Priamka KL sa dotýka kružníc opísaných trojuholníkom ALS, BVS a BKS.
b) Body A, B, K, L a O ležia na jednej kružnici. [55–A–III–3]

N7. Sú dané kružnice k, l, ktoré sa pretínajú v bodoch A, B. Označme K, L postupne dotykové body ich spoločnej dotyčnice zvolené tak, že bod B je vnútorným bodom trojuholníka AKL. Na kružniciach k a l zvoľme postupne body N a M tak, aby bod A bol vnútorným bodom úsečky MN. Dokážte, že štvoruholník $KLMN$ je tetivový práve vtedy, keď priamka MN je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku AKL. [60–A–I–3]

N8. Označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Kružnica, ktorá prechádza vrcholom B a dotýka sa priamky AI v bode I, pretína strany AB, BC postupne v bodoch P, Q. Priesečník priamky QI so stranou AC označme R. Dokážte, že platí

$$|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2.$$

[62–A–I–5]

4. *Označme $l(n)$ najväčšieho nepárneho deliteľa čísla n. Určte hodnotu súčtu*

$$l(1) + l(2) + l(3) + \ldots + l(2^{2013}).$$

(*Michal Rolínek*)

Riešenie. Je zrejmé, že pre každé prirodzené číslo k platia rovnosti $l(2k) = l(k)$ a $l(2k-1) = 2k-1$. Vďaka nim je možné hodnoty $l(n)$ sčítať po skupinách čísel n ležiacich vždy medzi dvoma susednými mocninami čísla 2, presnejšie určovať súčty

$$s(n) = l\bigl(2^{n-1}+1\bigr) + l\bigl(2^{n-1}+2\bigr) + l\bigl(2^{n-1}+3\bigr) + \ldots + l\bigl(2^n\bigr)$$

postupne pre jednotlivé $n = 1, 2, 3, \ldots$. Pre názornosť najskôr uveďme postup určenia konkrétneho súčtu

$$s(4) = l(9) + l(10) + l(11) + l(12) + l(13) + l(14) + l(15) + l(16).$$

Vklad jeho sčítancov $l(2k-1)$ je rovný

$$l(9) + l(11) + l(13) + l(15) = 9 + 11 + 13 + 15 = \frac{4}{2} \cdot (9 + 15) = 48$$

(naznačili sme použitie vzorca pre súčet niekoľkých členov aritmetickej postupnosti), vklad sčítancov $l(2k)$ má hodnotu

$$l(10) + l(12) + l(14) + l(16) = l(5) + l(6) + l(7) + l(8).$$

To je ale „predošlý“ súčet $s(3)$, ktorý sme už skôr mohli určiť zo súčtu $s(1) = 1$ podobným, teraz stručnejšie zapísaným postupom:

$$s(3) = l(5) + l(6) + l(7) + l(8) = 5 + 7 + s(2) = 12 + 3 + s(1) = 15 + 1 = 16.$$

Teraz už ľahko dopočítame $s(4) = 48 + s(3) = 64$.

Vykonaný výpočet nás privádza k hypotéze, že pre každé n platí $s(n) = 4^{n-1}$. Dokážeme ju matematickou indukciou. Ak platí $s(n) = 4^{n-1}$ pre určité n (ako to je pre $n = 1, 2, 3$), potom pre súčet $s(n+1)$ podľa nášho postupu dostaneme

$$\begin{aligned} s(n+1) &= l\bigl(2^n+1\bigr) + l\bigl(2^n+2\bigr) + l\bigl(2^{n-1}+3\bigr) + \ldots + l\bigl(2^{n+1}\bigr) = \\ &= \bigl[(2^n+1) + \bigl(2^{n-1}+3\bigr) + \ldots + \bigl(2^{n+1}-1\bigr)\bigr] + s(n) = \\ &= \frac{2^{n-1}}{2}\bigl(2^n + 1 + 2^{n+1} - 1\bigr) + 4^{n-1} = 2^{n-2} \cdot 3 \cdot 2^n + 4^{n-1} = 4^n. \end{aligned}$$

(Využili sme to, že počet nepárnych čísel od 2^n+1 do $2^{n+1}-1$ vrátane je rovný 2^{n-1}.) Dôkaz indukciou je hotový.

Podľa dokázaného vzorca $s(n) = 4^{n-1}$ pre súčet zo zadania úlohy platí

$$\begin{aligned} l(1) + l(2) + l(3) + \ldots + l\bigl(2^{2013}\bigr) &= l(1) + s(2) + s(3) + \ldots + s(2\,013) = \\ &= 1 + 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{2012} = 1 + \frac{4^{2013}-1}{3} = \frac{4^{2013}+2}{3}. \end{aligned}$$

Poznámka. Za pozornosť stojí, že vzorec $s(n) = 4^{n-1}$ z podaného riešenia je špeciálnym prípadom celkom prekvapivého vzťahu

$$l(k+1) + l(k+2) + l(k+3) + \ldots + l(2k) = k^2, \tag{1}$$

ktorý sa dá pre každé prirodzené číslo k dokázať bez použitia indukcie nasledujúcou elegantnou úvahou: Všetkých k sčítancov na ľavej strane (1) sú zrejme čísla z k-prvkovej množiny $\{1, 3, 5, \ldots, 2k-1\}$ a sú po dvoch rôzne, lebo podiel žiadnych dvoch čísel z množiny príslušných argumentov $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ nie je mocninou čísla 2. Preto je (až na poradie sčítancov) na ľavej strane (1) súčet $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1)$, ktorý má skutočne hodnotu k^2.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte, pre ktoré celé kladné n má číslo $l(n)$ päťkrát menej deliteľov ako samotné číslo n (počítame všetky kladné delitele). [Čísla n deliteľné 2^4, ale nie 2^5.]

N2. Ukážte, že pre každé celé kladné n platí $n+1 \leqq l(n) + l(n+1) \leqq \frac{1}{2}(3n+2)$. [Využite to, že pre párne n platí $1 \leqq l(n) \leqq \frac{1}{2}n$ a $l(n+1) = n+1$ a pre nepárne n je $l(n) = n$ a $1 \leqq l(n+1) \leqq \frac{1}{2}(n+1)$.]

N3. Dokážte, že ak vyberieme $n+1$ rôznych čísel z množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, 2n\}$, bude niektoré vybrané číslo deliteľom iného vybraného čísla. [Hodnota $l(k)$ pre ľubovoľné $k \in \mathsf{M}$ je jedno z n nepárnych čísel $1, 3, \ldots, 2n-1$, takže platí $l(a) = l(b)$ pre niektoré dve z vybraných čísel $a > b$. Podiel $a : b$ je potom mocninou čísla 2.]

---

5. *Koľkými rôznymi spôsobmi možno vydláždiť plochu* 3×10 *dlaždicami* 2×1*, ak je dovolené klásť ich v oboch navzájom kolmých smeroch?* (*Stanislava Sojáková*)

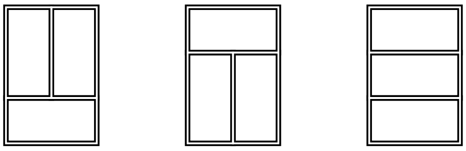
Riešenie. Namiesto plochy 3×10 uvažujme všeobecnú plochu $3 \times 2n$, kde n je prirodzené číslo, a označme a_n počet všetkých spôsobov vydláždenia tejto plochy dlaždicami 2×1 (ktorých potrebujeme $3n$ kusov).[2] Hoci je našou úlohou nájsť z čísel a_n iba jediné, totiž číslo a_5, nie je uvažované zovšeobecnenie samoúčelné. Ukáže sa totiž, že každú jednotlivú hodnotu a_n bude možné vypočítať podľa jednoduchého vzorca, ak budeme poznať dve predchádzajúce hodnoty a_{n-1} a a_{n-2}.[3] Tak je možné zo „začiatočných“ hodnôt a_1, a_2 vypočítať najprv a_3, potom a_4 atď. až po hľadané a_n. Takému postupu (bežnému v rade kombinatorických situácií, pozri návodné úlohy) hovoríme *rekurentná metóda* alebo tiež *procedúra rekurzie.*

Hodnotu $a_1 = 3$ je síce ľahké určiť nakreslením všetkých možných vydláždení plochy 3×2 (obr. 2), ale podobný postup na určenie hodnoty $a_2 = 11$ by bol dosť prácny. Namiesto toho ešte zavedieme i pre naše ďalšie rekurentné úvahy vhodné čísla b_n: každé číslo b_n bude označovať počet všetkých spôsobov neúplného vydláždenia plochy $3 \times (2n-1)$ dlaždicami 2×1 v počte $3n-2$ kusov, pri ktorom ostane jedno nepokryté políčko 1×1 v *konkrétne zvolenom* rohu celej plochy, povedzme vpravo dole. Vďaka osovej súmernosti vyjde rovnaký počet b_n spôsobov i pri požiadavke, aby nepokryté pole ostalo v pravom hornom rohu.

---

[2] Určite je zrejmé, prečo uvažujeme iba plochy $3 \times k$ s párnym parametrom k.

[3] Spomenutý jednoduchý vzorec nájdete pod číslom (2) až v poznámke za skončeným riešením. V ňom totiž budeme počítať rekurentne čísla a_n súčasne s istými vhodnými číslami b_n, bez ktorých by výklad našej rekurentnej metódy bol menej prehľadný.

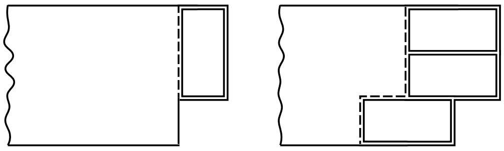


Obr. 2

K hodnote $a_1 = 3$ pripojme zrejmú hodnotu $b_1 = 1$ a prejdime k vlastnej rekurentnej metóde. Odvodíme pri nej, že pre každé celé $n > 1$ platia rovnosti

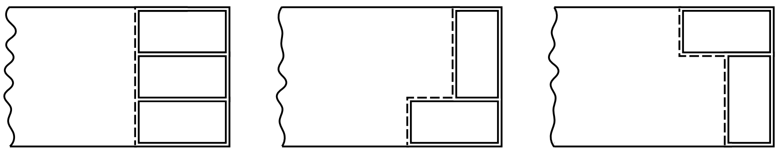
$$b_n = a_{n-1} + b_{n-1} \quad \text{a} \quad a_n = a_{n-1} + 2b_n. \tag{1}$$

Prvú rovnosť z (1) dokážeme tak, že všetky vydláždenia plochy $3 \times (2n-1)$ s „odseknutým“ rohom 1×1 vpravo dole rozdelíme do dvoch disjunktných skupín podľa toho, či je pravý horný roh 1×1 pokrytý zvislou dlaždicou (vydláždenie typu A na obr. 3), alebo vodorovnou dlaždicou (vydláždenie typu B, pri ktorom je vynútená poloha ďalších dvoch, spolu teda troch vodorovných dlaždíc, nakreslených na obr. 3). Počet vydláždení typu A je zrejme rovný počtu vydláždení zvyšnej plochy $3 \times (2n-2)$, teda číslu a_{n-1}. Podobne počet vydláždení typu B je rovný počtu vydláždení plochy $3 \times$ $\times\ (2n-3)$ s odseknutým pravým dolným rohom 1×1, teda číslu b_{n-1}. Tým je prvá rovnosť z (1) dokázaná.



Obr. 3

Druhú rovnosť z (1) overíme podobne so stručnejším komentárom: všetky vydláždenia plochy $3 \times 2n$ rozdelíme do troch disjunktných skupín – vydláždenia typov C, D a E znázornených na obr. 4. Všetkých vydláždení typu C je zrejme a_{n-1}, počty vydláždení typov D a E sa rovnajú tomu istému číslu b_n (to sme zdôraznili už skôr). Tým je i dôkaz druhej rovnosti z (1) skončený.



Obr. 4

Máme všetko pripravené na výpočet hľadaného čísla a_5. Z hodnôt $a_1 = 3$, $b_1 = 1$ a rovností (1) postupne dostaneme

$$b_2 = a_1 + b_1 = 4,\ a_2 = a_1 + 2b_2 = 11,\ b_3 = a_2 + b_2 = 15,\ a_3 = a_2 + 2b_3 = 41,$$
$$b_4 = a_3 + b_3 = 56,\ a_4 = a_3 + 2b_4 = 153,\ b_5 = a_4 + b_4 = 209,\ a_5 = a_4 + 2b_5 = 571.$$

Odpoveď. Hľadaný počet spôsobov vydláždenia plochy 3×10 je rovný 571.

Poznámka. Ako sme sľúbili v úvode riešenia, ukážeme teraz, že skúmané počty a_n všetkých vydláždení plochy $3 \times 2n$ dlaždicami 2×1 vyhovujú rekurentnej rovnici

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n \quad \text{pre každé } n \geqq 1, \tag{2}$$

takže ich môžeme počítať „samostatne“, teda bez súčasného výpočtu čísel b_n, ktorými sme si pomohli v podanom riešení. Odvodenie (2) urobíme algebraicky, totiž vylúčením čísel b_n zo vzťahov (1). Podľa nich platí

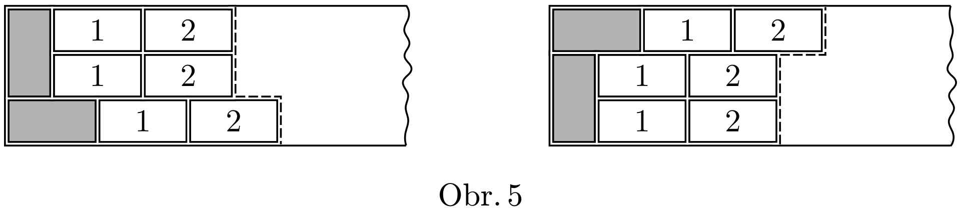
$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + 2b_{n+2} = a_{n+1} + 2(a_{n+1} + b_{n+1}) = \\ &= 3a_{n+1} + 2b_{n+1} = 3a_{n+1} + (a_{n+1} - a_n) = 4a_{n+1} - a_n. \end{aligned}$$

Dodajme ešte, že zo základov diskrétnej matematiky je známe, že každá postupnosť čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ktorá vyhovuje (2), má vyjadrenie $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, kde $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ sú korene kvadratickej rovnice $\lambda^2 = 4\lambda - 1$ a $C_{1,2}$ sú ľubovoľné konštanty. Tie je možné pre našu situáciu určiť z hodnôt $a_1 = 3$ a $a_2 = 11$ a dostať sa tak ku konečnému vzorcu pre počet a_n všetkých vydláždení plochy $3 \times 2n$ s všeobecným n v tvare

$$a_n = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cdot \bigl(2+\sqrt{3}\bigr)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot \bigl(2-\sqrt{3}\bigr)^n.$$

Iné riešenie. Opíšeme ešte jednu rekurentnú metódu na určovanie počtov a_n všetkých spôsobov vydláždenia plochy $3 \times 2n$ dlaždicami 2×1. Bude nás teraz zaujímať, či také vydláždenie je „zlepené“ z vydláždení dvoch plôch $3 \times k$ a $3 \times (2n - k)$ pre vhodné $k = 1, 2, \ldots, 2n - 1$, ktoré musí byť zrejme párne. Obe plochy vzniknú z pôvodnej plochy $3 \times 2n$ jedným priamym rezom dĺžky 3; pýtame sa teda, či pri niektorom takom reze žiadnu uloženú dlaždicu nerozpolíme. Pokiaľ sa to nestane, teda pokiaľ pri každom takom reze aspoň jednu dlaždicu rozpolíme, povieme, že pôvodné vydláždenie plochy $3 \times 2n$ je *celistvé*.

Je zrejmé, že každé z troch vydláždení plochy 3×2 je celistvé (obr. 2). Vysvetlíme, prečo pri každom $n \geqq 2$ existujú práve dve celistvé vydláždenia plochy $3 \times 2n$. Pri jej ľavom okraji musia byť umiestnené dlaždice jedným z dvoch spôsobov nakreslených na obr. 5. Pokrytie prvého stĺpca 3×1 totiž nemôže byť zabezpečené tromi vodorovnými dlaždicami, ale jednou zvislou a jednou vodorovnou dlaždicou, ktoré sú v oboch možných situáciách vyfarbené na sivo. Tieto dve dlaždice vynucujú vodorovné umiestnenie ďalších troch dlaždíc s vpísanou cifrou 1 (inak by skúmané vydláždenie nebolo celistvé, bolo by totiž zlepené z vydláždení plôch 3×2 a $3 \times (2n - 2)$). Ak je $n = 2$, sme s celým rozborom hotoví; v prípade $n \geqq 3$ je vynútené vodorovné umiestnenie ďalších troch dlaždíc s vpísanou cifrou 2. Opakovaním tejto úvahy nakoniec získame (jediné) dve celistvé vydláždenia celej plochy $3 \times 2n$ pre ľubovoľné dané $n \geqq 2$.



Obr. 5

Zaoberajme sa teraz dláždeniami plochy $3 \times 2n$, ktoré nie sú celistvé. Každé z nich je teda zlepením vydláždení dvoch plôch $3 \times 2k$ a $3 \times (2n-2k)$ pre vhodné $k = 1, 2, \dots, n-1$. Také k ale nemusí byť pre dané vydláždenie jediné, a tak vyberieme vždy „najväčšie“ vyhovujúce k; bude to práve také k, pri ktorom už je vyššie spomenuté vydláždenie „pravej“ plochy $3 \times (2n-2k)$ celistvé (pre najväčšie $k = n-1$ je to splnené automaticky), pričom vydláždenie „ľavej“ plochy $3 \times 2k$ je ľubovoľné.

Práve opísaným spôsobom sme všetky „necelistvé“ vydláždenia plochy $3 \times 2n$ s daným $n \geqq 2$ rozdelili do $n-1$ disjunktných skupín. Ich celkový počet je rovný, ak počítame po skupinách,

$$a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2 + \ldots + a_{n-2} \cdot 2 + a_{n-1} \cdot 3,$$

lebo prvý činiteľ v k-tom sčítanci udáva vždy počet (všetkých) vydláždení „ľavej“ plochy $3 \times 2k$ a druhý činiteľ udáva počet celistvých vydláždení „pravej“ plochy $3 \times (2n-2k)$. Ak pridáme k tomuto súčtu ešte sčítanec 2 za dve celistvé vydláždenia celej plochy $3 \times 2n$, dostaneme pre každé $n \geqq 2$ hľadaný rekurentný vzťah

$$a_n = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2}) + 3a_{n-1} + 2. \tag{3}$$

Odtiaľ sa od hodnoty $a_1 = 3$ postupne dostaneme až k hľadanej hodnote a_5, a tak skončíme alternatívne riešenie celej zadanej úlohy:

$$a_2 = 3a_1 + 2 = 11,\ a_3 = 2a_1 + 3a_2 + 2 = 41,\ a_4 = 2(a_1 + a_2) + 3a_3 + 2 = 153,$$
$$a_5 = 2(a_1 + a_2 + a_3) + 3a_4 + 2 = 571.$$

Poznámka. Ukážme ešte, že pomerne zložito zapísanú rekurentnú závislosť (3) je možné podobne ako v prvom riešení zjednodušiť na tvar rovnice (2) uvedenej v prvej poznámke. Naozaj, podľa (3) pre ľubovoľné $n \geqq 1$ platí

$$a_{n+2} = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + 3a_{n+1} + 2,$$
$$a_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + 3a_n + 2$$

a po odčítaní druhej rovnosti od prvej vychádza

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3a_{n+1} - a_n \quad \text{čiže} \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n.$$

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nájdite rekurentný vzťah pre určovanie počtov $s(n)$ spôsobov zdolania schodiska o n schodoch, ak sú dovolené iba kroky o jeden, dva alebo tri schody. [$s(n) = s(n-1) + s(n-2) + s(n-3)$ pre každé $n > 3$.]

N2. Ukážte, že počty spôsobov vydláždenia plochy $2 \times n$ dlaždicami 2×1 pre jednotlivé $n = 1, 2, 3, \ldots$ tvoria známu Fibonacciho postupnosť

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots,$$

v ktorej je každý člen (počnúc tretím) rovný súčtu dvoch predchádzajúcich členov. [Všetky vydláždenia plochy $2 \times n$ pre dané $n \geqq 3$ rozdeľte do dvoch skupín podľa toho, či pravý okraj dláždenia je tvorený jednou zvislou alebo dvoma vodorovnými dlaždicami. Vysvetlite, prečo v každej z oboch skupín je práve toľko vydláždení, koľko je všetkých vydláždení plôch $2 \times (n-1)$, resp. $2 \times (n-2)$.]

N3. Označme $p(n)$ počet všetkých n-ciferých čísel zložených len z cifier 1, 2, 3, 4, 5, v ktorých sa každé dve susedné cifry líšia aspoň o 2. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$5 \cdot 2{,}4^{n-1} \leqq p(n) \leqq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}.$$

[62–A–I–3]

N4. Pre ľubovoľné prirodzené číslo n zostavme z písmen A, B všetky možné „slová" dĺžky n. Rozdeľme ich do dvoch skupín S_n a L_n podľa toho, či je v danom slove párny alebo nepárny počet „slabík" BA (za párny považujeme i počet 0). Napríklad slová $\underline{BA}BBB\underline{BA}$ a $AAAAAAB$ patria obe do skupiny S_7, ale slová $AAB\underline{BA}BB$ a $\underline{BA}\,\underline{BA}A\underline{BA}$ patria obe do skupiny L_7. Určte, pre ktoré n majú skupiny S_n a L_n rovnaký počet prvkov. [56–A–I–3]

N5. Pre ľubovoľné prirodzené číslo n zostavme z písmen A a B všetky možné „slová" dĺžky n a označme p_n počet tých z nich, ktoré neobsahujú ani trojicu AAA po sebe idúcich písmen A ani dvojicu BB po sebe idúcich písmen B. Určte, pre ktoré prirodzené čísla n platí, že obe čísla p_n a p_{n+1} sú párne. [53–A–II–2]

N6. Pre ľubovoľné prirodzené číslo n zostavme z písmen A a B všetky možné „slová" dĺžky n a označme p_n počet tých z nich, ktoré neobsahujú ani štvoricu $AAAA$ po sebe idúcich písmen A ani trojicu BBB po sebe idúcich písmen B. Určte hodnotu výrazu

$$\frac{p_{2004} - p_{2002} - p_{1999}}{p_{2001} + p_{2000}}.$$

[53–A–III–2]

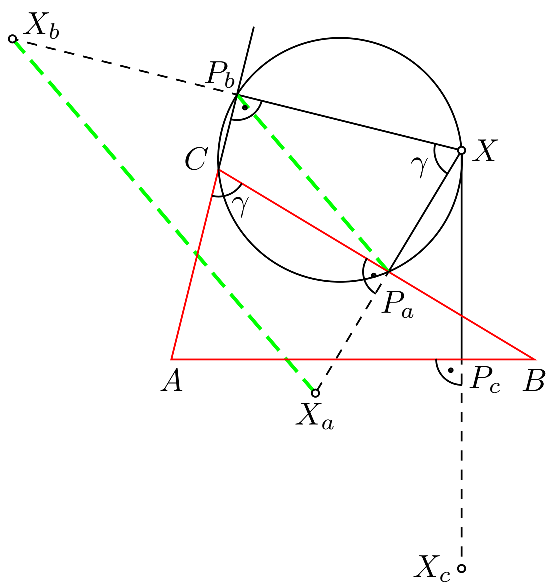
---

6. *V rovine daného trojuholníka ABC určte všetky body, ktorých obrazy v osových súmernostiach podľa priamok AB, BC, CA tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka.* (*Pavel Calábek*)

Riešenie. Zvolíme akýkoľvek bod X roviny ABC a zostrojíme jeho obrazy X_a, X_b, X_c v osových súmernostiach podľa priamok BC, CA, AB (obr. 6). Aby sme mohli posúdiť otázku, kedy dostaneme rovnostranný trojuholník $X_aX_bX_c$, dokážeme najprv, že pre vzájomné vzdialenosti jeho vrcholov platia všeobecne (t. j. bez ohľadu na voľbu bodu X) vzorce

$$|X_aX_b| = 2|XC| \sin\gamma, \quad |X_aX_c| = 2|XB| \sin\beta, \quad |X_bX_c| = 2|XA| \sin\alpha, \qquad (1)$$

v ktorých α, β, γ je zvyčajné označenie vnútorných uhlov trojuholníka ABC.



Obr. 6

Stačí dokázať iba prvú rovnosť v (1). Tá je zrejmá v prípade $X = C$, lebo vtedy platí $X_a = X_b$ $(= X)$. V prípade $X \neq C$ je XC priemerom Tálesovej kružnice z obr. 6, na ktorej ležia vyznačené kolmé priemety P_a, P_b bodu X na priamky BC, CA. Keďže tetive P_aP_b prislúchajú obvodové uhly γ a $180° - \gamma$, zo sínusovej vety vyplýva rovnosť $|P_aP_b| = |XC| \sin \gamma$. Vzhľadom na to, že úsečka X_aX_b je zrejme obrazom tetivy P_aP_b v rovnoľahlosti so stredom v bode X a koeficientom 2, platí $|X_aX_b| = 2|P_aP_b|$, čím sú rovnosti (1) dokázané.

Zo vzorcov (1) vyplýva, že našou úlohou je nájsť práve tie body X roviny ABC, pre ktoré platí

$$2|XA| \sin \alpha = 2|XB| \sin \beta = 2|XC| \sin \gamma > 0$$

(práve vtedy je totiž trojuholník $X_aX_bX_c$ rovnostranný). Inak vyjadrené, hľadáme body X, ktorých vzdialenosti od vrcholov A, B, C sú kladné a spĺňajú úmeru

$$|XA| : |XB| : |XC| = \frac{1}{\sin \alpha} : \frac{1}{\sin \beta} : \frac{1}{\sin \gamma} = \frac{1}{|BC|} : \frac{1}{|AC|} : \frac{1}{|AB|}$$

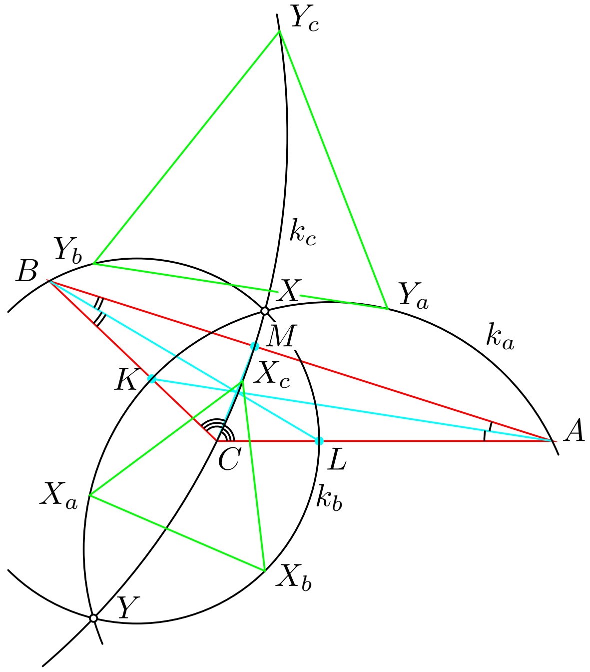
(kvôli ďalšiemu výkladu sme využili sínusovú vetu a prešli od sínusov uhlov k dĺžkam protiľahlých strán v trojuholníku ABC). Práve také body X zostrojíme ako spoločné body nasledujúcich troch Apollóniových kružníc, presnejšie množín bodov X zadaných rovnicami

$$k_a\colon \frac{|XB|}{|XC|} = \frac{|AB|}{|AC|}, \quad k_b\colon \frac{|XA|}{|XC|} = \frac{|AB|}{|BC|}, \quad k_c\colon \frac{|XA|}{|XB|} = \frac{|AC|}{|BC|}; \tag{2}$$

pritom je zrejmé, že ľubovoľným priesečníkom dvoch týchto kružníc bude prechádzať i tretia kružnica.[4] Z rovností v (2) vidno, že $A \in k_a$, $B \in k_b$ a $C \in k_c$. To uľahčuje praktickú konštrukciu týchto troch kružníc: ak sú AK, BL, CM priečky trojuholníka ABC, na ktorých ležia osi jeho vnútorných uhlov (obr. 7), leží na kružnici k_a nielen bod A, ale i bod K (v dôsledku dobre známeho pomeru $|KB| : |KC| = |AB| : |AC|$), takže stred kružnice k_a môžeme zostrojiť ako priesečník osi úsečky AK s priamkou BC (ak neplatí $|AB| = |AC|$, kedy k_a je os strany BC). Podobne využitím osí úsečiek BL, CM určíme stredy kružníc k_b, k_c. Na obr. 7 vidíme situáciu, keď kružnice k_a, k_b, k_c majú dva spoločné body X, Y, a naša úloha tak má dve riešenia.[5] Sú na ňom nakreslené i zodpovedajúce rovnostranné trojuholníky $X_aX_bX_c$ a $Y_aY_bY_c$. Nie je náhoda, že ich vrcholy ležia po jednom na zodpovedajúcich kružniciach k_a, k_b a k_c, lebo stredy týchto kružníc ležia na osiach uvedených súmerností.

[4] Niektoré z týchto množín (jedna alebo tri) môžu byť priamkami namiesto kružnicami. Budeme sa tomu venovať neskoršie pri diskusii o počte riešení.

[5] Ako uvidíme o chvíľu, dve riešenia zadanej úlohy budú existovať vždy, keď daný trojuholník ABC nebude rovnostranný. Netriviálnosť tohto poznatku nepriamo podporuje i skutočnosť, že obe riešenia X a Y na obr. 7 ležia mimo trojuholníka ABC.



Obr. 7

Aj keď je zadaná úloha *konštrukčne* vyriešená, musíme ešte posúdiť otázku, koľko má úloha riešení, teda otázku počtu spoločných bodov Apollóniových kružníc k_a, k_b, k_c (ako vieme, stačí vziať dve z nich). Odpoveď podáme v nasledujúcej časti; pomôžeme si pritom opäť poznatkom o existencii priečok daného trojuholníka ABC, ktoré sú zároveň tetivami skúmaných kružníc; zachováme aj ich označenie AK, BL, CM z obr. 7.

Diskusia.

a) Ak je trojuholník ABC *rovnostranný*, sú k_a, k_b, k_b osi jeho strán a úloha tak má jediné riešenie, ktorým je stred daného rovnostranného trojuholníka.

b) Ak je trojuholník ABC *rovnoramenný* a platí napríklad $|AB| \neq |AC| = |BC|$, je k_c os jeho základne AB, ktorá pretne kružnicu k_a v dvoch bodoch, lebo pretína jej tetivu AK, a teda i oba jej oblúky AK. Pre rovnoramenný trojuholník ABC, ktorý nie je rovnostranný, má preto úloha vždy dve riešenia.

c) Ak je trojuholník ABC *rôznostranný* a napríklad AB je jeho najdlhšia strana (ako na obr. 7), majú kružnice k_a, k_b, ako ukážeme, dva spoločné body. Keďže kružnica k_a je určená rovnicou $|XB|/|XC| = |AB|/|AC| > 1$, leží bod B v jej vonkajšej oblasti a bod C v jej vnútornej oblasti. Preto vo vnútornej oblasti k_a leží aj celá úsečka AC (s výnimkou bodu A), teda aj jej vnútorný bod L. Kružnica k_a tak pretína tetivu BL kružnice k_b, a preto sa pretínajú aj obe kružnice. Pre rôznostranný trojuholník ABC má preto úloha vždy dve riešenia.

Návodné a doplňajúce úlohy:

Súťažná úloha sa vzťahuje k študijnej téme tohto ročníka MO kategórie A, ktorým sú *Apollóniove kružnice*, čiže kružnice, ktoré spájame s nasledovným tvrdením. *Predpokladajme, že v rovine π sú dané dva rôzne body A, B a že je ešte dané kladné číslo $\lambda \neq 1$. Potom množina*

$$\mathsf{M} = \{X \in \pi;\ |AX| : |BX| = \lambda\}$$

je kružnica so stredom na priamke AB. Práve táto množina M sa nazýva Apollóniovou kružnicou (prislúchajúcou daným bodom A a B a danému pomeru λ).

Dôkaz uvedeného tvrdenia predkladáme nižšie ako návodnú úlohu 1 (doplnenú riešením). Dodajme ešte, že v prípade pomeru $\lambda = 1$ je M zrejme os úsečky AB. Pre podrobnejšie zoznámenie sa s témou odporúčame text na str. 11–14. brožúrky L. Boček, J. Zhouf: *Máte rádi kružnice?*, Prometheus, Praha, 1995.

N1. Dokážte vyššie uvedené tvrdenie o množine M bodov v rovine. [Najskôr ukážeme, že pre ľubovoľný bod $X \in \mathsf{M}$, ktorý neleží na priamke AB, platí: *Osi vnútorného a vonkajšieho uhla pri vrchole X trojuholníka ABX pretínajú priamku AB postupne v bodoch P a Q, ktoré nezávisia od výberu bodu X a ktoré samotné patria do množiny* M (sú to jediné dva body z M, ktoré na priamke AB ležia). Skutočne, zo sínusovej vety pre trojuholníky APX a BPX vyplýva $|AP| : |AX| = \sin \frac{1}{2}\gamma : \sin\varphi$ a $|BP| : |BX| = \sin \frac{1}{2}\gamma : \sin(180° - \varphi)$, kde $\gamma = |\measuredangle AXB|$ a $\varphi = |\measuredangle APX|$, odkiaľ $|AP| : |BP| = |AX| : |BX| = \lambda$. Podobne sa odvodí i druhá úmera $|AQ| : |BQ| = \lambda$. Z dokázaného tvrdenia o bodoch P a Q vyplýva, že každý bod množiny M nutne leží na Tálesovej kružnici zostrojenej nad (fixným) priemerom PQ. Ostáva ukázať opačné tvrdenie o tom, že každý bod X tejto kružnice patrí do množiny M, že teda spĺňa úmeru $|AX| : |BX| = \lambda$. Na to podľa predošlého stačí predpokladať, že X neleží na priamke AB, a dokázať rovnosť veľkostí uhlov $\gamma_1 = |\measuredangle PXA|$ a $\gamma_2 = |\measuredangle PXB|$. Urobíme to v prípade $\lambda > 1$, keď uvažované body ležia na priamke v poradí A, P, B, Q (prípad $0 < \lambda < 1$ sa posúdi analogicky, alebo sa prehodením bodov A, B prejde od pomeru λ k pomeru $1/\lambda$.) Keďže uhly AXQ, BXQ majú postupne veľkosti $90° + \gamma_1$, $90° - \gamma_2$, zo sínusovej vety vyplývajú rovnosti

$$\lambda = \frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AX| \sin\gamma_1}{|BX| \sin\gamma_2} \quad \text{a} \quad \lambda = \frac{|AQ|}{|BQ|} = \frac{|AX| \cos\gamma_1}{|BX| \cos\gamma_2},$$

z ktorých vychádza $\operatorname{tg}\gamma_1 = \operatorname{tg}\gamma_2$, čiže $\gamma_1 = \gamma_2$. Celý dôkaz tvrdenia o množine M je hotový.]

N2. V rovine π sú dané štyri rôzne body A, B, C, D neležiace na jednej priamke. Zostrojte všetky body $X \in \pi$, pre ktoré platí $\triangle ABX \sim \triangle CDX$. [Koeficient $\lambda = |AB| : |CD|$ podobnosti poznáme; preto hľadané body X zostrojíme ako priesečníky dvoch Apollóniových kružníc: prvá z nich prislúcha bodom A, C a pomeru λ, druhá bodom B, D a tomu istému pomeru λ.]

N3. V rovine π sú dané štyri rôzne body A, B, C, D ležiace v tomto poradí na jednej priamke. Zostrojte všetky body $X \in \pi$, pre ktoré sú uhly AXB, BXC, CXD navzájom zhodné. [Hľadané body X sú priesečníky dvoch Apollóniových kružníc: prvá z nich prislúcha bodom A, C a prechádza bodom B (ten teda určuje príslušný deliaci pomer), druhá prislúcha bodom B, D a prechádza bodom C.]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Tomáš Jurík, Pavel Novotný, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013