**61. ročník Matematickej olympiády**
**2011/2012** *Riešenia úloh MEMO*

---

**I-1.** *Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ také, že rovnosť*

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1)$$

*platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$. (Symbol $\mathbb{R}^+$ označuje množinu všetkých kladných reálnych čísel.)* (*Chorvátsko*)

**Riešenie.** Skúmajme najskôr, pre aké hodnoty $x$ platí $x+f(y) = xy+1$. Po jednoduchej úprave dostaneme z tejto rovnosti za predpokladu $y \neq 1$ ekvivalentné vyjadrenie

$$x = \frac{f(y) - 1}{y - 1}. \tag{1}$$

Ak by existovalo kladné $y \neq 1$ také, že výraz (1) je kladný, mohli by sme takéto $x$ a $y$ dosadiť do zadanej rovnosti a dostali by sme $f(A) = yf(A)$ (pričom $A = x + f(y) = xy + 1$), čo je v spore s tým, že $y \neq 1$ a zároveň $f(A) \neq 0$. Preto výraz (1) je pre každé $y \neq 1$ záporný, čiže pre $y > 1$ platí $f(y) < 1$ a pre $y < 1$ platí $f(y) > 1$.

Zvoľme ľubovoľné $y > 1$ a položme $x = 1 - 1/y$. Dosadením týchto hodnôt do zadanej rovnosti dostaneme

$$f\left(1 - \frac{1}{y} + f(y)\right) = yf(y).$$

Ak $f(y) > 1/y$, tak pravá, a teda aj ľavá strana predošlej rovnosti je väčšia ako 1, z čoho vzhľadom na vlastnosť odvodenú v predošlom odseku vyplýva

$$1 - \frac{1}{y} + f(y) \leqq 1, \qquad \text{čiže} \quad f(y) \leqq \frac{1}{y},$$

čo je spor. Analogicky z predpokladu $f(y) < 1/y$ odvodíme spor $f(y) \geqq 1/y$. Preto pre všetky $y > 1$ platí $f(y) = 1/y$.

Napokon uvažujme ľubovoľné $0 < a \leqq 1$ a zvoľme ľubovoľné $y$ spĺňajúce $y > 1/a \geqq 1$. Položením $x = a - 1/y$ dostaneme (s využitím zadanej rovnosti a už odvodených hodnôt $f$ pre argumenty väčšie ako 1)

$$f(a) = f\left(x + \frac{1}{y}\right) = f(x + f(y)) = yf(xy + 1) = y \cdot \frac{1}{xy + 1} = \frac{1}{x + \frac{1}{y}} = \frac{1}{a}.$$

Preto jediným kandidátom na riešenie je funkcia $f(x) = 1/x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}^+$. O tom, že vyhovuje, sa presvedčíme triviálnou skúškou.

**I-2.** *Dané je kladné celé číslo $N$. Množina $\mathsf{S} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ sa nazýva prípustná, ak neobsahuje také tri navzájom rôzne čísla $a$, $b$, $c$, že $a$ delí $b$ a súčasne $b$ delí $c$. Určte najväčší možný počet prvkov, ktorý môže mať prípustná množina $\mathsf{S}$.* (Maďarsko)

**Riešenie.** Ak trojica rôznych prirodzených čísel $a$, $b$, $c$ spĺňa $a \mid b$ a súčasne $b \mid c$ (takúto trojicu budeme nazývať *zakázaná*), tak $b \geqq 2a$ a $c \geqq 2b$, z čoho vyplýva $c \geqq 4a$. Ak teda najväčšie číslo z $\mathsf{S}$ je menšie ako štvornásobok najmenšieho čísla z $\mathsf{S}$, neobsahuje množina $\mathsf{S}$ žiadnu zakázanú trojicu, čiže je prípustná. Dajme do $\mathsf{S}$ všetky čísla väčšie ako $\frac{1}{4}N$, teda položme

$$\mathsf{S} = \left\{ \lfloor \tfrac{1}{4}N \rfloor + 1, \lfloor \tfrac{1}{4}N \rfloor + 2, \dots, N \right\}.$$

Táto prípustná množina má $N - \lfloor \frac{1}{4}N \rfloor = \lceil \frac{3}{4}N \rceil$ prvkov. Ukážeme, že viac prvkov žiadna prípustná množina obsahovať nemôže.

Množina $\mathsf{M} = \{1, 2, \dots, N\}$ obsahuje $\lceil \frac{1}{2}N \rceil$ nepárnych čísel. Pre každé také nepárne číslo $q$ uvažujme množinu

$$\mathsf{H}_q = \left\{ q, 2q, 4q, \dots, 2^{i_q} q \right\},$$

pričom $i_q$ je najväčšie nezáporné celé číslo $i$ také, že $2^i \cdot q \leqq N$. Množiny $\mathsf{H}_q$ tvoria rozklad množiny $\mathsf{M}$ (každé číslo z $\mathsf{M}$ sa dá jednoznačne napísať v tvare $2^i \cdot q$ pre nejaké nepárne $q \leqq N$ a celé $i \geqq 0$). Je zrejmé, že ľubovoľná trojica čísel z tej istej množiny $\mathsf{H}_q$ je zakázaná. V množine $\mathsf{S}$ teda môžu byť najviac dve čísla z každej množiny $\mathsf{H}_q$. Avšak pre $q > \frac{1}{2}N$ je množina $\mathsf{H}_q$ jednoprvková – obsahuje iba číslo $q$.

Spolu dostávame, že $\mathsf{S}$ môže obsahovať z množín $\mathsf{H}_q$ najviac po dve čísla pre $1 \leqq q \leqq \frac{1}{2}N$ a po jednom čísle pre $\frac{1}{2}N < q \leqq N$, teda

$$|\mathsf{S}| \leqq 2 \cdot \left\lceil \tfrac{1}{2} \lfloor \tfrac{1}{2}N \rfloor \right\rceil + 1 \cdot \left( \lceil \tfrac{1}{2}N \rceil - \left\lceil \tfrac{1}{2} \lfloor \tfrac{1}{2}N \rfloor \right\rceil \right) = \left\lceil \tfrac{1}{2} \lfloor \tfrac{1}{2}N \rfloor \right\rceil + \lceil \tfrac{1}{2}N \rceil = \lceil \tfrac{3}{4}N \rceil.$$

Poslednú úpravu je možné urobiť napríklad osobitným rozobraním dvoch prípadov podľa parity čísla $N$.

*Odpoveď.* Prípustná množina môže mať najviac $\lceil \frac{3}{4}N \rceil$ prvkov.

---

**I-3.** *Daný je lichobežník $ABCD$, pričom $AB \parallel CD$, $|AB| > |CD|$ a priamka $BD$ je osou uhla $ADC$. Priamka prechádzajúca bodom $C$ rovnobežná s $AD$ pretína úsečky $BD$ a $AB$ postupne v bodoch $E$ a $F$. Označme $O$ stred kružnice opísanej trojuholníku $BEF$. Predpokladajme, že $|\measuredangle ACO| = 60^\circ$. Dokážte, že*

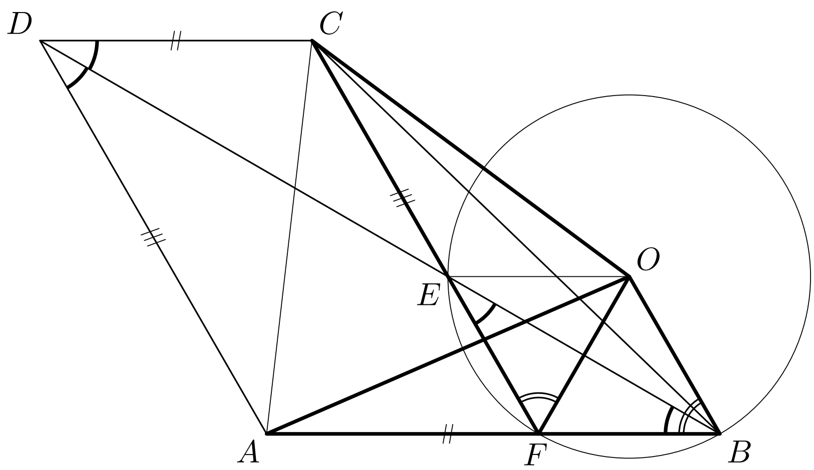
$$|CF| = |AF| + |FO|.$$

(Chorvátsko)

**Riešenie.** Z rovnobežnosti priamok $AD$ a $FC$, resp. priamok $AB$ a $CD$ vyplýva

$$|\measuredangle ADE| = |\measuredangle FEB|, \qquad \text{resp.} \qquad |\measuredangle CDB| = |\measuredangle ABD|.$$

Podľa zadania je však $DB$ osou uhla $ADC$, takže všetky štyri uvedené uhly majú rovnakú veľkosť (obr. 1). Trojuholníky $BDA$ a $BEF$ sú teda rovnoramenné a vzhľadom




Obr. 1

na to, že $AFCD$ je rovnobežník, platí

$$|AB| = |AD| = |CF| \qquad \text{a} \qquad |FE| = |FB|. \tag{1}$$

Trojuholníky $EFO$ a $FBO$ sú oba rovnoramenné a ich ramená majú zhodné dĺžky rovné polomeru kružnice opísanej trojuholníku $BEF$. Podľa (1) majú zhodné aj základne, sú teda zhodné, čiže $|\measuredangle EFO| = |\measuredangle FBO|$. Z toho a z (1) dostávame, že aj trojuholníky $CFO$ a $ABO$ sú zhodné, a to podľa vety *sus*. Odtiaľ $|CO| = |AO|$, preto trojuholník $ACO$ je rovnoramenný, a vzhľadom na to, že uhol $ACO$ má veľkosť $60°$, je dokonca rovnostranný. Potom $|\measuredangle AOC| = 60°$, t. j. trojuholník $CFO$ je obrazom trojuholníka $ABO$ v otočení o $60°$ (keďže sú zhodné). Preto aj $|\measuredangle BOF| = 60°$ a trojuholník $FBO$ je rovnostranný.

S využitím (1) teda dostávame

$$|AF| + |FO| = |AF| + |FB| = |AB| = |CF|,$$

čo bolo treba dokázať.

---

**I-4.** *Postupnosť* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je definovaná vzťahmi* $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ *a*

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{2} + a_n + a_{n-1} \quad \text{pre všetky kladné celé čísla } n.$$

*Určte všetky prvočísla* $p$*, pre ktoré existuje kladné celé číslo* $m$ *také, že* $p$ *je deliteľom* $a_m - 1$. (*Švajčiarsko*)

**Riešenie.** Pomocou matematickej indukcie možno ľahko nahliadnuť, že všetky členy zadanej postupnosti sú párne. Párne sú totiž prvé dva členy a ak sú párne členy $a_{n-1}$ aj $a_n$ pre nejaké $n$, tak súčin $a_n a_{n-1}$ je deliteľný štyrmi, čiže číslo $\frac{1}{2} a_n a_{n-1}$ je párne a člen $a_{n+1}$ je ako súčet troch párnych čísel tiež párny. Prvočíslo $p = 2$ teda nevyhovuje. Naopak, $p = 3$ vyhovuje, pretože $3 \mid a_1 - 1$. Ďalej budeme predpokladať, že $p \geqq 5$.

Zadané vyjadrenie člena $a_{n+1}$ možno upraviť na tvar

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1} + 2a_n + 2a_{n-1}}{2} = \frac{(a_n + 2)(a_{n-1} + 2)}{2} - 2.$$

Ak označíme $b_n = \frac{1}{2}(a_n + 2)$, platí $b_{n+1} = b_n b_{n-1}$. Vzhľadom na to, že $b_0 = 2$ a $b_1 = 3$, sú všetky $b_n$ prirodzené čísla majúce v rozklade na súčin prvočísel len činitele 2 a 3, teda $p \nmid b_n$. Označme $z_n$ zvyšok čísla $b_n$ po delení $p$ a skúmajme postupnosť týchto zvyškov. Keďže každý ďalší zvyšok $z_{n+1}$ je jednoznačne určený dvojicou predošlých zvyškov $(z_{n-1}, z_n)$ a rôznych dvojíc zvyškov je len konečne veľa, musí sa niektorá dvojica v postupnosti zopakovať a postupnosť $\{z_n\}$ je periodická, dĺžku periódy označme $d$.

Tvrdíme, že prvá dvojica $(z_{n-1}, z_n)$, ktorá sa v postupnosti zopakuje, je dvojica $(z_0, z_1)$ (t. j. postupnosť je periodická od začiatku – nemá predperiódu). Predpokladajme sporom, že prvá sa zopakuje nejaká dvojica $(z_{k-1}, z_k) = (z_{d+k-1}, z_{d+k})$ pre $k > 1$. Potom platí

$$
\begin{aligned}
z_k &\equiv z_{k-2} z_{k-1} \pmod p, \\
z_k &\equiv z_{d+k} \equiv z_{d+k-2} z_{d+k-1} \equiv z_{d+k-2} z_{k-1} \pmod p.
\end{aligned}
$$

Odčítaním kongruencií dostaneme

$$0 \equiv (z_{k-2} - z_{d+k-2}) z_{k-1} \pmod p,$$

z čoho vzhľadom na to, že $p \nmid b_{k-1}$, vyplýva $z_{k-2} = z_{d+k-2}$, teda aj $(z_{k-2}, z_{k-1}) = (z_{d+k-2}, z_{d+k-1})$. To je však spor s predpokladom, že prvá zopakovaná dvojica bola $(z_{k-1}, z_k)$.

Zistili sme, že dvojica $(z_0, z_1) = (2, 3)$ sa v postupnosti zvyškov objaví aj na mieste $(z_d, z_{d+1})$. Potom máme

$$3 \equiv b_{d+1} = b_d b_{d-1} \equiv 2b_{d-1} \pmod p, \qquad \text{čiže} \qquad p \mid 2b_{d-1} - 3 = a_{d-1} - 1.$$

*Odpoveď.* Zadaným podmienkam vyhovujú všetky prvočísla okrem 2.

---

**T-1.** *Nájdite všetky trojice $(x, y, z)$ reálnych čísel také, že*

$$
\begin{aligned}
2x^3 + 1 &= 3zx, \\
2y^3 + 1 &= 3xy, \\
2z^3 + 1 &= 3yz.
\end{aligned}
$$

(*Česká rep., Jaroslav Švrček*)

**Riešenie.** Predpokladajme, že čísla $x$, $y$, $z$ vyhovujú zadaniu. Z prvej rovnosti triviálne dostávame $x \neq 0$ a podobne z ostatných dvoch rovností máme $y, z \neq 0$. Preto môžeme rovnice prepísať na tvar

$$z = \frac{2x^3 + 1}{3x}, \qquad x = \frac{2y^3 + 1}{3y}, \qquad y = \frac{2z^3 + 1}{3z}.$$

Z týchto vyjadrení vyplývajú implikácie

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad z > 0 \quad \Rightarrow \quad y > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0,$$

teda ak je ktorékoľvek z čísel $x$, $y$, $z$ kladné, sú kladné aj zvyšné dve. Preto buď sú všetky tri čísla kladné, alebo všetky záporné. Tieto dva prípady vyšetríme osobitne, pričom v oboch rozboroch použijeme rovnosti, ktoré dostaneme vzájomným odčítaním dvojíc zadaných rovností:

$$2(x^3 - y^3) = 3x(z - y), \tag{1}$$
$$2(y^3 - z^3) = 3y(x - z), \tag{2}$$
$$2(z^3 - x^3) = 3z(y - x). \tag{3}$$

- ▷ *Prípad* $x, y, z > 0$. Ak $x > y$, tak ľavá strana (1) je kladná, čiže aj pravá strana je kladná, t. j. $z > y$. Potom je ľavá strana (2) záporná, čiže aj pravá je záporná, t. j. $z > x$. Potom je však ľavá strana (3) kladná, čiže aj pravá je kladná, t. j. $y > x$, čo je v spore s úvodným predpokladom. Zrejme rovnako dostaneme spor z predpokladu $x < y$ (všetky nerovnosti sa len otočia). Nutne teda $x = y$ a napr. z (1) následne $x = y = z$.
- ▷ *Prípad* $x, y, z < 0$. Postupujeme podobne ako v predošlom prípade, avšak berieme do úvahy zápornosť činiteľov pred zátvorkami na pravých stranách, takže zátvorky na oboch stranách v každej rovnici majú opačné znamienka. Ak $x > y$, tak z (1) vyplýva $z < y$. Z toho podľa (2) máme $z > x$. Spolu teda $x > y > z > x$, čo je spor. Prípad $x < y$ vedie rovnako k sporu a znova dostávame $x = y = z$.

Ukázali sme, že všetky tri čísla musia byť rovnaké. Vyhovujúce trojice už nájdeme ľahko vyriešením rovnice $2x^3 + 1 = 3x^2$, ktorú možno po prevedení členov na jednu stranu rozložiť na súčinový tvar $(2x + 1)(x - 1)^2 = 0$, t. j. $x = 1$ alebo $x = -\frac{1}{2}$.

*Odpoveď.* Zadaniu vyhovujú trojice $(1, 1, 1)$ a $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

---

**T-2.** *Nech $a$, $b$, $c$ sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí $abc = 1$. Dokážte, že*

$$\sqrt{9 + 16a^2} + \sqrt{9 + 16b^2} + \sqrt{9 + 16c^2} \geqq 3 + 4(a + b + c).$$

(*Nemecko*)

**Riešenie.** Pri riešení použijeme nasledovné pomocné tvrdenie: Ak pre kladné reálne čísla $x$, $y$, $z$ platí $x + y + z < 3$, tak

$$\frac{9 - x^2}{x} \cdot \frac{9 - y^2}{y} \cdot \frac{9 - z^2}{z} > 512.$$

*Dôkaz.* Podľa AG-nerovnosti pre štvoricu čísel platí

$$3 + x = 1 + 1 + 1 + x \geqq 4\sqrt[4]{x}$$

a analogicky $3 + y \geqq 4\sqrt[4]{y}$, $3 + z \geqq 4\sqrt[4]{z}$. Vynásobením týchto troch nerovností získame

$$(3 + x)(3 + y)(3 + z) \geqq 64\sqrt[4]{xyz}. \tag{1}$$

Podľa AG-nerovnosti pre trojicu čísel máme $3 > x + y + z \geqq 3\sqrt[3]{xyz}$, z čoho vyplýva

$$1 > \sqrt[3]{xyz}, \qquad \text{takže aj} \qquad 1 > xyz \tag{2}$$

a tiež
$$xy + yz + zx \geqq 3(xyz)^{\frac{2}{3}}.$$
S využitím týchto odhadov dostávame
$$\begin{aligned}(3-x)(3-y)(3-z) = 9(3-x-y-z) + 3(xy+yz+zx) - xyz >\\ > 9(xyz)^{\frac{2}{3}} - xyz = (xyz)^{\frac{2}{3}}\,(9 - \sqrt[3]{xyz}) > 8(xyz)^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$
a po vynásobení s (1) vzhľadom na (2) platí
$$(9-x^2)(9-y^2)(9-z^2) > 512(xyz)^{\frac{11}{12}} > 512xyz.$$
Z toho už triviálne vyplýva dokazovaná nerovnosť.

Vráťme sa k pôvodne zadanému tvrdeniu. Označme
$$x = \sqrt{9+16a^2} - 4a, \qquad y = \sqrt{9+16b^2} - 4b, \qquad z = \sqrt{9+16c^2} - 4c.$$
Zrejme $x, y, z > 0$. Navyše
$$9 - x^2 = 9 - (9+16a^2) - 16a^2 + 8a\sqrt{9+16a^2} = 8a\left(\sqrt{9+16a^2} - 4a\right) = 8ax$$
a podobne $9 - y^2 = 8by$, $9 - z^2 = 8cz$. Preto
$$\frac{9-x^2}{x} \cdot \frac{9-y^2}{y} \cdot \frac{9-z^2}{z} = 512abc = 512,$$
a aby sme nedostali spor s pomocným tvrdením, nutne musí byť $x + y + z \geqq 3$. To je však ekvivalentné so zadanou nerovnosťou.

---

**T-3.** *Nech $n$ je kladné celé číslo. Uvažujme slová dĺžky $n$ zložené z písmen množiny $\{M, E, O\}$. Označme $a$ počet tých slov, ktoré obsahujú párny počet (môže byť aj nulový) blokov $ME$ a párny počet (môže byť aj nulový) blokov $MO$. Podobne označíme $b$ počet tých slov, ktoré obsahujú nepárny počet blokov $ME$ a nepárny počet blokov $MO$. Dokážte, že $a > b$.* (*Poľsko*)

**Riešenie.** Označme $\mathsf{A}$ množinu slov dĺžky $n$ s párnym počtom blokov $ME$ aj $MO$ a $\mathsf{B}$ množinu slov dĺžky $n$ s nepárnym počtom oboch typov blokov. Uvažujme ľubovoľné slovo z $\mathsf{B}$. Keď v tomto slove nájdeme prvý blok $ME$ alebo $MO$ (ten, ktorý sa vyskytne skôr) a nahradíme ho druhým blokom, čiže zmeníme $E$ na $O$ alebo naopak, v slove sa počet blokov jedného typu o jedna zmenší a počet blokov druhého typu o jedna zväčší. Keďže pred zmenou boli oba počty nepárne, po zmene budú oba párne, teda výsledné slovo bude patriť do $\mathsf{A}$. Takúto operáciu vieme vykonať s ľubovoľným slovom z $\mathsf{B}$, pretože každé také slovo obsahuje nepárny, t. j. nenulový počet blokov oboch typov.

Pre každé slovo z $\mathsf{A}$, ktoré vzniklo uvedenou operáciou, vieme spätne identifikovať prvý blok $ME$ alebo $MO$ a zmenou $E$ na $O$ alebo naopak dostaneme pôvodné slovo z $\mathsf{B}$. To znamená, že každé slovo z $\mathsf{B}$ sa operáciou zmení na iné slovo z $\mathsf{A}$, z čoho okamžite vyplýva $|\mathsf{A}| \geqq |\mathsf{B}|$. Na zdôvodnenie toho, že v skutočnosti dokonca $|\mathsf{A}| > |\mathsf{B}|$, si stačí uvedomiť, že v $\mathsf{A}$ existujú slová, ktoré nedostaneme opísanou operáciou zo žiadneho slova z $\mathsf{B}$. Takými slovami sú zrejme tie, ktoré neobsahujú žiadny blok $ME$ ani $MO$ (podľa zadania takéto slová patria do $\mathsf{A}$); ich počet je pre každé $n$ nenulový.

**T-4.** *Nech $p > 2$ je prvočíslo. Pre ľubovoľnú permutáciu $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(p))$ množiny $\mathsf{S} = \{1, 2, \dots, p\}$ označme $f(\pi)$ počet tých čísel spomedzi*

$$\pi(1),\ \pi(1) + \pi(2),\ \dots,\ \pi(1) + \pi(2) + \dots + \pi(p),$$

*ktoré sú deliteľné číslom $p$. Určte priemernú hodnotu čísla $f(\pi)$, ak uvažujeme všetky permutácie $\pi$ množiny $\mathsf{S}$.* (*Maďarsko*)

**Riešenie.** Nech $\pi_0$ je ľubovoľná permutácia. Uvažujme ďalších $p - 1$ permutácií $\pi_1$, $\pi_2, \dots, \pi_{p-1}$, ktoré dostaneme z $\pi_0$ postupným zväčšovaním zložiek o 1, pričom číslo $p$ namiesto zväčšenia na $p + 1$ nahradíme číslom 1. Platí teda $\pi_j(i) \equiv \pi_0(i) + j \pmod p$.

Spočítame, aká je priemerná hodnota $f(\pi)$, ak uvažujeme len permutácie $\pi_0, \dots, \pi_{p-1}$. Na to stačí určiť, aký je počet násobkov $p$ medzi všetkými číslami v zozname

$$\begin{array}{llll}
\pi_0(1), & \pi_0(1) + \pi_0(2), & \dots, & \pi_0(1) + \pi_0(2) + \dots + \pi_0(p), \\
\pi_1(1), & \pi_1(1) + \pi_1(2), & \dots, & \pi_1(1) + \pi_1(2) + \dots + \pi_1(p), \\
 & & \vdots & \\
\pi_{p-1}(1), & \pi_{p-1}(1) + \pi_{p-1}(2), & \dots, & \pi_{p-1}(1) + \pi_{p-1}(2) + \dots + \pi_{p-1}(p)
\end{array} \tag{1}$$

a výsledok vydeliť počtom riadkov, teda číslom $p$. Pre čísla v $k$-tom stĺpci zoznamu (1) platí

$$\begin{aligned}
\pi_j(1) + \pi_j(2) + \dots + \pi_j(k) &\equiv (\pi_0(1) + j) + (\pi_0(2) + j) + \dots + (\pi_0(k) + j) \equiv \\
&\equiv \pi_0(1) + \pi_0(2) + \dots + \pi_0(k) + kj \pmod p.
\end{aligned}$$

Ak teda označíme $\pi_0(1) + \pi_0(2) + \dots + \pi_0(k) = s_k$, dávajú čísla v $k$-tom stĺpci zoznamu (1) po delení $p$ rovnaké zvyšky ako čísla

$$s_k, \quad s_k + k, \quad s_k + 2k, \quad \dots, \quad s_k + (p-1)k. \tag{2}$$

Ak $k < p$, sú čísla $k$ a $p$ nesúdeliteľné a zoznam (2) neobsahuje žiadne dve čísla s rovnakým zvyškom po delení $p$, pretože ak $j \neq j'$, tak

$$(s_k + jk) - (s_k + j'k) = k(j - j') \not\equiv 0 \pmod p.$$

V zozname (2) po delení $p$ sa potom každý zvyšok objaví práve raz, čiže práve jedno číslo je v ňom násobkom $p$.

Ak $k = p$, tak $s_k = s_p = \pi_0(1) + \pi_0(2) + \dots + \pi_0(p) = 1 + 2 + \dots + p = \frac{1}{2}p(p+1)$, čo je pre $p > 2$ násobkom $p$. V zozname (2) (resp. v poslednom stĺpci zoznamu (1), ktorý obsahuje $p$ totožných čísel $s_p$) sú teda všetky čísla násobkom $p$.

Spolu je počet násobkov prvočísla $p$ v zozname (1) rovný $(p-1) \cdot 1 + p = 2p - 1$ a priemerná hodnota $f(\pi)$ je rovná $(2p-1)/p$. Táto hodnota nie je závislá na zvolenej permutácii $\pi_0$. Pritom množinu všetkých permutácií množiny $\mathsf{S}$ vieme rozložiť na $p$-prvkové triedy tak, že v každej triede sa budú permutácie líšiť iba o posunutie zložiek modulo $p$ (rovnako ako permutácie $\pi_0, \dots, \pi_{p-1}$ opísané v úvode). Keďže pre každú takú triedu vychádza priemerná hodnota $f(\pi)$ rovná $(2p-1)/p$, je to zároveň priemerná hodnota pre množinu všetkých permutácií množiny $\mathsf{S}$.

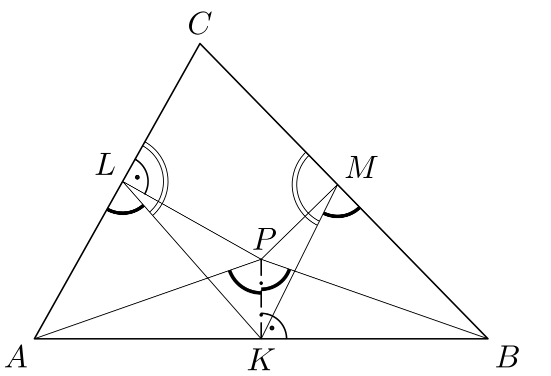
**T-5.** *Nech $K$ je stred strany $AB$ daného trojuholníka $ABC$. Nech $L$ a $M$ sú také body ležiace postupne na stranách $AC$ a $BC$, pre ktoré platí $|\sphericalangle CLK| = |\sphericalangle KMC|$. Dokážte, že kolmice na strany $AB$, $AC$ a $BC$ prechádzajúce postupne bodmi $K$, $L$ a $M$ sa pretínajú v jednom bode.* (*Poľsko*)

**Riešenie.** Označme $P$ priesečník osi strany $AB$ s kolmicou na stranu $AC$ vedenou bodom $L$.

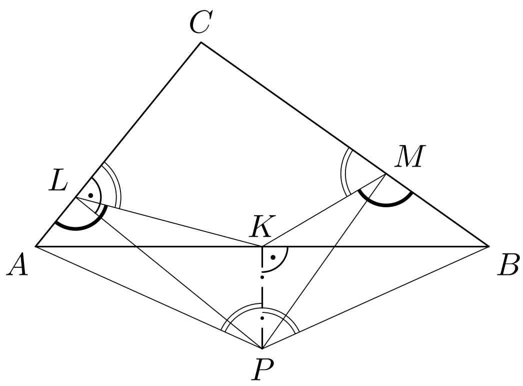
Uvažujme najskôr prípad, že $P$ leží vnútri polroviny $ABC$ (obr. 2a). Body $K$, $L$ ležia na Tálesovej kružnici s priemerom $AP$. Z vlastností obvodových uhlov nad tetivou $AK$ tejto kružnice potom vyplýva $|\sphericalangle ALK| = |\sphericalangle APK|$. Podľa zadania

$$|\sphericalangle ALK| = 180^\circ - |\sphericalangle CLK| = 180^\circ - |\sphericalangle KMC| = |\sphericalangle BMK|$$

a zo súmernosti podľa osi $KP$ máme $|\sphericalangle APK| = |\sphericalangle BPK|$. Spolu dostávame $|\sphericalangle BMK| = |\sphericalangle BPK|$, teda body $K$, $B$, $M$, $P$ ležia na jednej kružnici. Keďže $PK \perp KB$, je $BP$ priemerom tejto kružnice a odtiaľ $PM \perp BM$, teda kolmice zo zadania sa pretínajú v bode $P$.



Obr. 2a



Obr. 2b

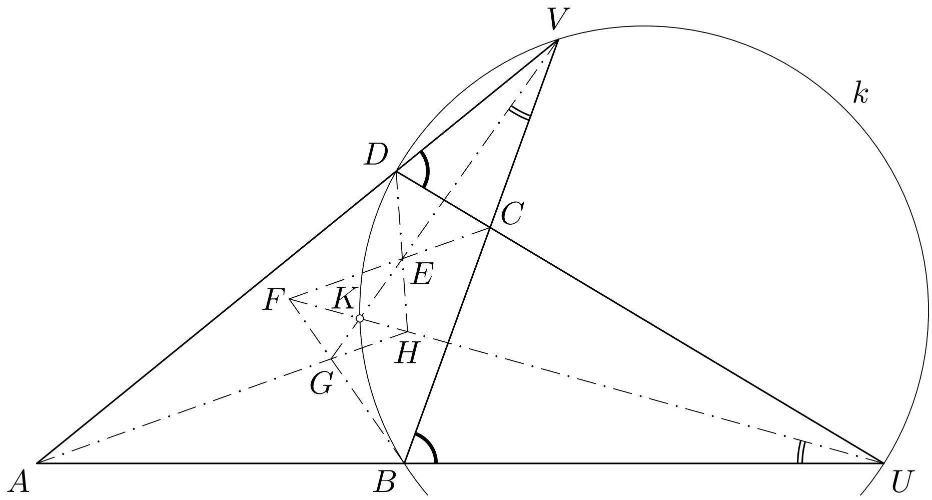
Prípad, keď $P$ leží v polrovine opačnej k polrovine $ABC$ (obr. 2b), vyšetríme analogicky. Z Tálesovej kružnice nad priemerom $AP$ vyplýva $|\sphericalangle ALK| = 180^\circ - |\sphericalangle APK|$, takže postupom z predošlého prípadu odvodíme vzťah $|\sphericalangle BMK| = 180^\circ - |\sphericalangle BPK|$, z čoho vzhľadom na polohu bodov $P$, $M$ v rôznych polrovinách určených priamkou $BK$ vyplýva, že $K$, $B$, $M$, $P$ ležia na jednej kružnici. Záver je rovnaký ako v prvom prípade.

Špeciálny prípad, keď $P = K$, vedie k záveru triviálne – vtedy $|\sphericalangle BMK| = |\sphericalangle ALK| = 90^\circ$, teda zadané kolmice sa pretínajú v bode $K$.

**T-6.** *Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, ktorého žiadne dve strany nie sú rovnobežné, pričom $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDA|$. Predpokladajme, že priesečníky dvojíc osí uhlov pri susedných vrcholoch štvoruholníka $ABCD$ tvoria štvoruholník $EFGH$. Nech $K$ je priesečník uhlopriečok štvoruholníka $EFGH$. Dokážte, že priesečník priamok $AB$ a $CD$ leží na kružnici opísanej trojuholníku $BKD$.* (*Chorvátsko*)

**Riešenie.** Predpokladajme, že označenie bodov $E$, $F$, $G$, $H$ je zvolené tak ako na obr. 3. Priesečník priamok $AB$ a $CD$ označme $U$ a priesečník priamok $AD$ a $BC$ označme $V$.

Bod $H$ je priesečníkom osí uhlov $DAB$ a $ADC$, preto je – v závislosti od toho, či $U$ leží na polpriamke $AB$ alebo $BA$ – buď stredom kružnice vpísanej trojuholníku $ADU$ alebo stredom kružnice pripísanej k strane $AD$ trojuholníka $ADU$. V oboch prípadoch leží na osi uhla $AUD$. Analogicky bod $F$ leží na osi uhla $BUC$, ktorý je však totožný s uhlom $AUD$. Uhlopriečka $HF$ štvoruholníka $EFGH$ je teda osou uhla $AUD$. Rovnakou úvahou odvodíme, že $EG$ je osou uhla $AVB$. Takže $K$ leží na priesečníku osí uhlov $AUD$ a $AVB$.




Obr. 3

Označme $|\measuredangle BAD| = \alpha$ a $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle CDA| = \beta$. Ak $\alpha + \beta < 180°$, ležia body $U$, $V$ v polrovine $BDC$, ak $\alpha + \beta > 180$, ležia v polrovine $BDA$ (prípad $\alpha + \beta = 180°$ vzhľadom na rôznobežnosť strán $AB$, $CD$ nastať nemôže). V oboch prípadoch ležia body $B$, $D$ v tej istej polrovine určenej priamkou $UV$, a keďže $|\measuredangle UBV| = |\measuredangle UDV| = 180° - \beta$, ležia body $U$, $B$, $D$, $V$ na jednej kružnici, ktorú označme $k$. Uhly $DVB$, $DUB$ nad tetivou $DB$ kružnice $k$ majú rovnakú veľkosť[1] a preto majú rovnakú veľkosť aj príslušné polovičné uhly, t. j. $|\measuredangle KVB| = |\measuredangle KUB|$. Z toho vyplýva, že body $U$, $B$, $K$, $V$ ležia na jednej kružnici (zrejme $K$ a $B$ ležia v tej istej polrovine určenej priamkou $UV$). Táto kružnica je totožná s kružnicou $k$, pretože s ňou má spoločné body $U$, $B$, $V$. Na $k$ teda leží všetkých päť bodov $U$, $B$, $K$, $D$, $V$, z čoho už triviálne dostaneme dokazované tvrdenie.

---

**T-7.** *Nájdite všetky trojice* $(x, y, z)$ *celých kladných čísel také, že*

$$x^y + y^x = z^y,$$
$$x^y + 2012 = y^{z+1}.$$

(*Litva*)

**Riešenie.** Predpokladajme, že $x$, $y$, $z$ vyhovujú zadaniu. Rozoberieme dva prípady podľa parity čísla $x$.

[1] Rovnosť veľkostí uhlov $DVB$, $DUB$ možno odvodiť aj bez kružnice $k$ z podobných trojuholníkov $ADU$, $ABV$ – každý z nich má dva uhly s veľkosťami $\alpha$, $\beta$ (resp. $180° - \alpha$, $180° - \beta$, ak $U$, $V$ ležia v polrovine $BDA$), čiže sú podobné podľa vety *uu*.

Ak $x$ je nepárne, tak ľavá strana druhej rovnice je nepárna, takže $y$ je nepárne. Ľavá strana prvej rovnice je potom párna a teda $z$ je párne. Z druhej rovnice zjavne $y \neq 1$, čiže $y \geqq 2$ a pravá strana prvej rovnice je deliteľná štyrmi. Ak celú sústavu prepíšeme v zvyškoch po delení štyrmi, nakoľko aj $4 \mid 2012$, dostaneme

$$x^y + y^x \equiv 0 \pmod 4, \qquad x^y \equiv y^{z+1} \pmod 4.$$

Dosadením za $x^y$ z druhej kongruencie do prvej máme $y^{z+1} + y^x \equiv 0 \pmod 4$. Tomu však nevyhovuje žiadne nepárne $y$, pretože ak $y \equiv 1 \pmod 4$, tak

$$y^{z+1} + y^x \equiv 1^{z+1} + 1^x \equiv 2 \pmod 4$$

a ak $y \equiv 3 \pmod 4$, tak vzhľadom na nepárnosť $x$ aj $z+1$ platí

$$y^{z+1} + y^x \equiv 3^{z+1} + 3^x \equiv (-1)^{z+1} + (-1)^x \equiv -2 \equiv 2 \pmod 4.$$

Ak $x$ je párne, je ľavá strana druhej rovnice párna, takže $y$ je párne. Z prvej rovnice potom aj $z$ je párne, t. j. $z \geqq 2$. Pravá strana druhej rovnice je teda deliteľná ôsmimi. Ak by bolo $y > 2$, bolo by aj $x^y$ deliteľné ôsmimi, a keďže $8 \nmid 2012$, druhá rovnica by nemohla byť splnená. Nutne teda $y = 2$ a sústava sa redukuje na tvar

$$x^2 + 2^x = z^2, \qquad x^2 + 2012 = 2^{z+1}. \tag{1}$$

Podľa prvej z týchto rovníc $z^2 > x^2$, teda $z > x$, takže $2^{z+1} > 2^{x+1}$, z čoho podľa druhej z rovníc $x^2 + 2012 > 2^{x+1}$. Ľahko sa dosadením presvedčíme, že pre $x = 12$ táto nerovnosť neplatí a matematickou indukciou dokážeme, že neplatí ani pre žiadne $x > 12$: Ak totiž $x$ zväčšíme o 1, hodnota $2^{x+1}$ sa zväčší 2-krát, zatiaľ čo hodnota $x^2 + 2012$ sa zväčší iba $q$-krát, pričom

$$q = \frac{(x+1)^2 + 2012}{x^2 + 2012} = 1 + \frac{2x+1}{x^2+2012} = 1 + \frac{2 + \frac{1}{x}}{x + \frac{2012}{x}} < 1 + \frac{3}{x} < 2.$$

Ostáva prípad $x < 12$, t. j. $x \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Pre tieto hodnoty je číslo $z = \sqrt{x^2 + 2^x}$ celým jedine ak $x = 6$, vtedy $z = 10$. Ľahko sa presvedčíme, že potom je splnená aj druhá rovnica v (1).

*Odpoveď.* Jedinou vyhovujúcou trojicou je $(6, 2, 10)$.

---

**T-8.** *Pre ľubovoľné celé kladné číslo $n$ označme $d(n)$ počet kladných deliteľov čísla $n$. Zistite, či existujú celé kladné čísla $a$ a $b$ také, že $d(a) = d(b)$ a $d(a^2) = d(b^2)$, ale $d(a^3) \neq d(b^3)$.* *(Česká rep., Michal Rolínek)*

**Riešenie.** Čísla s vlastnosťami zo zadania existujú. Okrem príkladov takých dvojíc uvedieme aj postup, ako ich možno objaviť.

Pripomeňme známy vzorec, že ak číslo $n$ má rozklad na súčin prvočísel $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, tak $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$.[2] Podľa tohto vzorca máme

[2] Vzorec možno odvodiť takto: každý deliteľ čísla $n$ má tvar $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$, pričom $0 \leqq a_i \leqq \alpha_i$, každé $a_i$ teda môže nadobúdať $(\alpha_i + 1)$ rôznych hodnôt, celkovo potom exponenty $a_1, \ldots, a_k$ možno kombinovať $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$ spôsobmi.

tiež $d(n^2) = (2\alpha_1 + 1)\dots(2\alpha_k + 1)$ a $d(n^3) = (3\alpha_1 + 1)\dots(3\alpha_k + 1)$. Pre skrátenie zápisu označme $\alpha_i + 1 = \beta_i$. Potom

$$d(n) = \beta_1 \dots \beta_k, \quad d(n^2) = (2\beta_1 - 1)\dots(2\beta_k - 1), \quad d(n^3) = (3\beta_1 - 2)\dots(3\beta_k - 2).$$

Uvažujme dvojice

$$(2,3), \quad (3,5), \quad (4,7), \quad (8,15), \quad (18,35), \quad (32,63). \tag{1}$$

Všetky sú typu $(m, 2m-1)$ pre vhodné $m$ a rozklad na súčin prvočísel každého z dvanástich čísel v uvedených dvojiciach obsahuje len prvočísla z množiny $\{2,3,5,7\}$. Čísla $a$, $b$ budeme hľadať v takom tvare, aby exponenty z ich rozkladov zväčšené o 1, t. j. príslušné hodnoty $\beta_i$, boli spomedzi čísel nachádzajúcich sa na prvých zložkách dvojíc v (1); príslušné hodnoty $2\beta_i - 1$ potom budú na druhých zložkách. Rovnosti $d(a) = d(b)$ a $d(a^2) = d(b^2)$ prepíšme na tvar $d(a)/d(b) = 1$ a $d(a^2)/d(b^2) = 1$. Snažíme sa teda nájsť celé čísla $u$, $v$, $w$, $x$, $y$, $z$ také, že

$$2^u \cdot 3^v \cdot 4^w \cdot 8^x \cdot 18^y \cdot 32^z = 1 \qquad \text{a} \qquad 3^u \cdot 5^v \cdot 7^w \cdot 15^x \cdot 35^y \cdot 63^z = 1. \tag{2}$$

Kladné čísla zo šestice $(u,v,w,x,y,z)$ spĺňajúcej (2) použijeme na vytvorenie čísla $a$, záporné na vytvorenie čísla $b$.

Rovnosti (2) upravíme na tvar

$$2^{u+2w+3x+y+5z} \cdot 3^{v+2y} = 1, \qquad 3^{u+x+2z} \cdot 5^{v+x+y} \cdot 7^{w+y+z} = 1,$$

čiže

$$\begin{aligned} u + 2w + 3x + y + 5z &= 0, \\ v + 2y &= 0, \\ u + x + 2z &= 0, \\ v + x + y &= 0, \\ w + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Táto sústava piatich lineárnych rovníc o šiestich neznámych má okrem triviálneho riešenia $u = v = w = x = y = z = 0$ (ktoré na vytvorenie vyhovujúcich $a$, $b$ použiť nedokážeme) nekonečne veľa ďalších riešení, ktoré možno ľahko nájsť postupnou elimináciou neznámych. Všeobecné riešenie sústavy je $(u,v,w,x,y,z) = (t, -2t, 0, t, t, -t)$, kde $t$ je reálny parameter. Pre účely nášho postupu stačí zobrať nejaké celočíselné riešenie, napr. $(u,v,w,x,y,z) = (1,-2,0,1,1,-1)$. Podľa (1) následne na základe kladných hodnôt $u = x = y = 1$ zvolíme $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 8$, $\beta_3 = 18$ a zo záporných hodnôt $v = -2$, $z = -1$ určíme $\beta'_1 = \beta'_2 = 3$, $\beta'_3 = 32$. Vzhľadom na postup platí

$$\beta_1\beta_2\beta_3 = \beta'_1\beta'_2\beta'_3, \quad (2\beta_1 - 1)(2\beta_2 - 1)(2\beta_3 - 1) = (2\beta'_1 - 1)(2\beta'_2 - 1)(2\beta'_3 - 1) \tag{3}$$

a ľahko možno nahliadnuť, že $(3\beta_1 - 2)(3\beta_2 - 2)(3\beta_3 - 2) \neq (3\beta'_1 - 2)(3\beta'_2 - 2)(3\beta'_3 - 2)$. Číslami vyhovujúcimi zadaniu sú teda napr.

$$a = 2^1 \cdot 3^7 \cdot 5^{17}, \qquad b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^{31}$$

(trojice prvočísel v základoch môžeme samozrejme voliť ľubovoľne).

**Iné riešenie.** Podobne ako v prvom postupe budeme hľadať $\beta_i$, $\beta_i'$ spĺňajúce (3). Pokúsime sa ich nájsť v tvare

$$\beta_1 = pq, \quad \beta_2 = r, \quad \beta_3 = s, \qquad \beta_1' = p, \quad \beta_2' = q, \quad \beta_3' = rs$$

pre vhodné prirodzené čísla $p$, $q$, $r$, $s$. Prvá rovnosť z (3) je pri takomto vyjadrení splnená triviálne, pre splnenie druhej rovnosti musí platiť

$$\frac{(2p-1)(2q-1)}{2pq-1} = \frac{(2r-1)(2s-1)}{2rs-1}.$$

Označme $V(m,n) = (2m-1)(2n-1)/(2mn-1)$. Naším cieľom je nájsť dve rôzne dvojice $\{m,n\}$, pre ktoré tento výraz nadobúda rovnakú hodnotu. Úpravou dostávame

$$V(m,n) = \frac{4mn-2m-2n+1}{2mn-1} = 2 - \frac{2m+2n-3}{2mn-1}.$$

Hľadajme také $m$, $n$, že $V(m,n) = 2 - 1/k$ pre nejaké prirodzené číslo $k$. Po úprave získame ekvivalentné vyjadrenie

$$(m-k)(n-k) = \frac{1}{2}(2k-1)(k-1).$$

Dosadením povedzme $k = 5$ (na pravej strane predošlej rovnosti vtedy bude celé číslo a zároveň nie prvočíslo) dostaneme

$$(m-5)(n-5) = 18.$$

Riešením tejto rovnice sú napríklad dvojice $(6,23)$, $(7,14)$, stačí teda zvoliť $p = 6$, $q = 23$, $r = 7$, $s = 14$, z čoho dostávame (po presvedčení sa, že $d(a^3) \neq d(b^3)$) vyhovujúcu dvojicu

$$a = 2^{6\cdot 23-1} \cdot 3^{7-1} \cdot 5^{14-1} = 2^{137} \cdot 3^6 \cdot 5^{13}, \qquad b = 2^{6-1} \cdot 3^{23-1} \cdot 5^{7\cdot 14-1} = 2^5 \cdot 3^{22} \cdot 5^{97}.$$