61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

1. *Pre dané kladné celé číslo n označme $\tau(n)$ počet kladných deliteľov čísla n a $\varphi(n)$ počet kladných celých čísel, ktoré nie sú väčšie ako n a sú s n nesúdeliteľné. Nájdite všetky n, pre ktoré je niektoré z troch čísel n, $\tau(n)$, $\varphi(n)$ aritmetickým priemerom zvyšných dvoch.* (Peter Novotný)

Riešenie. Keďže $\tau(1) = \varphi(1) = 1$, hodnota $n = 1$ zadaniu vyhovuje. Ďalej predpokladajme, že $n > 1$. V takom prípade zrejme $\tau(n) \leqq n$ a $\varphi(n) < n$, takže n nemôže byť aritmetickým priemerom čísel $\tau(n)$ a $\varphi(n)$. Rozoberieme preto dve možnosti.

Prípad 1. Nech $\tau(n) = \frac{1}{2}(\varphi(n) + n)$. Potom $\tau(n) > \frac{1}{2}n$. Pre každý deliteľ d čísla n je aj n/d deliteľom n. Aspoň jedno z čísel d, n/d je menšie alebo rovné $\sqrt{n}$, teda množina $\{1, 2, \dots, \lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$ obsahuje aspoň polovicu[1] deliteľov čísla n. Z toho vyplýva nerovnosť $\frac{1}{2}\tau(n) \leqq \sqrt{n}$, odkiaľ máme

$$2\sqrt{n} \geqq \tau(n) > \frac{1}{2}n \qquad \Rightarrow \qquad 4n > \frac{1}{4}n^2 \qquad \Rightarrow \qquad 16 > n.$$

Pre $1 < n < 16$ spočítame hodnotu $\tau(n)$, skontrolujeme podmienku $\tau(n) > \frac{1}{2}n$ a vo zvyšných málo prípadoch dopočítame $\varphi(n)$:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\tau(n)$	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4
$\tau(n) > \frac{1}{2}n$?	✓	✓	✓	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	×
$\varphi(n)$	1	2	2		2									
$\tau(n) = \frac{1}{2}(\varphi(n) + n)$?	×	×	✓		✓									

Zistili sme, že v tomto prípade vyhovujú zadaniu jedine $n = 4$ a $n = 6$.

Prípad 2. Nech $\varphi(n) = \frac{1}{2}(\tau(n) + n)$. Upravíme tento vzťah na

$$\tau(n) = 2\varphi(n) - n. \tag{1}$$

Ak n je párne, tak žiadne párne číslo nie je nesúdeliteľné s n, čiže $\varphi(n) \leqq \frac{1}{2}n$. Potom však z (1) dostaneme $\tau(n) \leqq 0$, čo je spor. Preto n musí byť nepárne. Z (1) následne vyplýva, že aj $\tau(n)$ musí byť nepárne, čo znamená, že n je druhou mocninou celého (nepárneho) čísla. Predpokladajme, že rozklad na súčin prvočísel čísla n je

$$n = p_1^{2\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k}, \qquad k \geqq 1, \quad p_i \geqq 3, \quad \alpha_i \geqq 1.$$

Na základe známych vzorcov[2] pre výpočet $\tau(n)$ a $\varphi(n)$ upravíme (1) na

$$\begin{aligned}(2\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (2\alpha_k + 1) &= 2p_1^{2\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k - 1}(p_k - 1) - p_1^{2\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k} = \\ &= p_1^{2\alpha_1 - 1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k - 1}\big(2(p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_k - 1) - p_1 \cdot \ldots \cdot p_k\big).\end{aligned}$$

[1] Presne polovicu obsahuje práve vtedy, keď n nie je druhou mocninou celého čísla.
[2] Ak $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, tak $\tau(m) = (\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$ a $\varphi(m) = m(1 - 1/p_1) \ldots (1 - 1/p_k)$.

Pravá strana je deliteľná súčinom $p_1^{2\alpha_1-1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k-1}$, takže aj ľavá ním musí byť deliteľná. Z toho dostávame

$$p_1^{2\alpha_1-1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k-1} \leqq (2\alpha_1+1) \cdot \ldots \cdot (2\alpha_k+1). \tag{2}$$

Avšak pre každé celé čísla $p \geqq 3$ a $\alpha \geqq 1$ platí nerovnosť $p^{2\alpha-1} \geqq (2\alpha+1)$, pričom rovnosť nastáva jedine pre $p = 3$ a $\alpha = 1$. To dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na α: Prípad $\alpha = 1$ je triviálny (s rovnosťou nastávajúcou jedine pre $p = 3$) a keď α zväčšíme o 1, pravá strana sa zväčší o 2, zatiaľ čo ľavá strana sa zväčší až o

$$p^{2(\alpha+1)-1} - p^{2\alpha-1} = p^{2\alpha-1}(p^2-1) > 2.$$

Každý z činiteľov na ľavej strane (2) je teda väčší alebo rovný ako prislúchajúci činiteľ napravo a všetky činitele sú kladné. jediný spôsob, ako splniť nerovnosť (2), je položiť $k = 1$, $p_1 = 3$, $\alpha_1 = 1$, čiže $n = 9$. V takom prípade naozaj dostávame $\tau(9) = 3$ a $\varphi(9) = 6$, t. j. rovnosť (1) je splnená.

Odpoveď. Zadaniu vyhovujú hodnoty $n \in \{1, 4, 6, 9\}$.

---

2. *Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že rovnosť*

$$f(x + f(y)) - f(x) = (x + f(y))^4 - x^4$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. (*Kamil Duszenko*)

Riešenie. Zadanú rovnosť prepíšeme na ekvivalentný tvar

$$f(x + f(y)) = (x + f(y))^4 - x^4 + f(x). \tag{1}$$

Dosaďme do (1) $x = -f(z)$, $y = z$:

$$f(0) = -(f(z))^4 + f(-f(z)) \quad \text{pre všetky } z \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Keď do (1) dosadíme $x = -f(z)$, s využitím (2) dostávame

$$f(f(y) - f(z)) = (f(y) - f(z))^4 - (f(z))^4 + f(-f(z)) = (f(y) - f(z))^4 + f(0)$$

pre všetky $y, z \in \mathbb{R}$. To znamená, že ak sa číslo t dá vyjadriť ako rozdiel dvoch hodnôt funkcie f, t. j. $t = f(y) - f(z)$ pre nejaké $y, z \in \mathbb{R}$, tak $f(t) = t^4 + f(0)$. Ukážeme, že ak f nadobúda nejakú nenulovú hodnotu, tak každé číslo je rozdielom nejakých dvoch hodnôt funkcie f.

Nech $f(a) = b \neq 0$. Dosadením $y = a$ do zadanej rovnosti obdržíme

$$f(x + b) - f(x) = (x + b)^4 - x^4.$$

Keďže $b \neq 0$, výraz na pravej strane je v premennej x mnohočlenom stupňa 3, a preto jeho oborom hodnôt je celá množina $\mathbb{R}$. Z toho vyplýva, že aj ľavá strana, na ktorej je rozdiel dvoch hodnôt funkcie f, nadobúda pre $x \in \mathbb{R}$ všetky reálne hodnoty. Spojením zistených vlastností dostávame $f(t) = t^4 + f(0)$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$. Ľahko možno overiť, že všetky funkcie tvaru $f(x) = x^4 + k$ spĺňajú zadanú rovnosť.

Konštantná nulová funkcia očividne takisto vyhovuje.

Odpoveď. Riešením úlohy sú funkcie $f(x) = 0$ a $f(x) = x^4 + k$ pre ľubovoľný reálny parameter k.

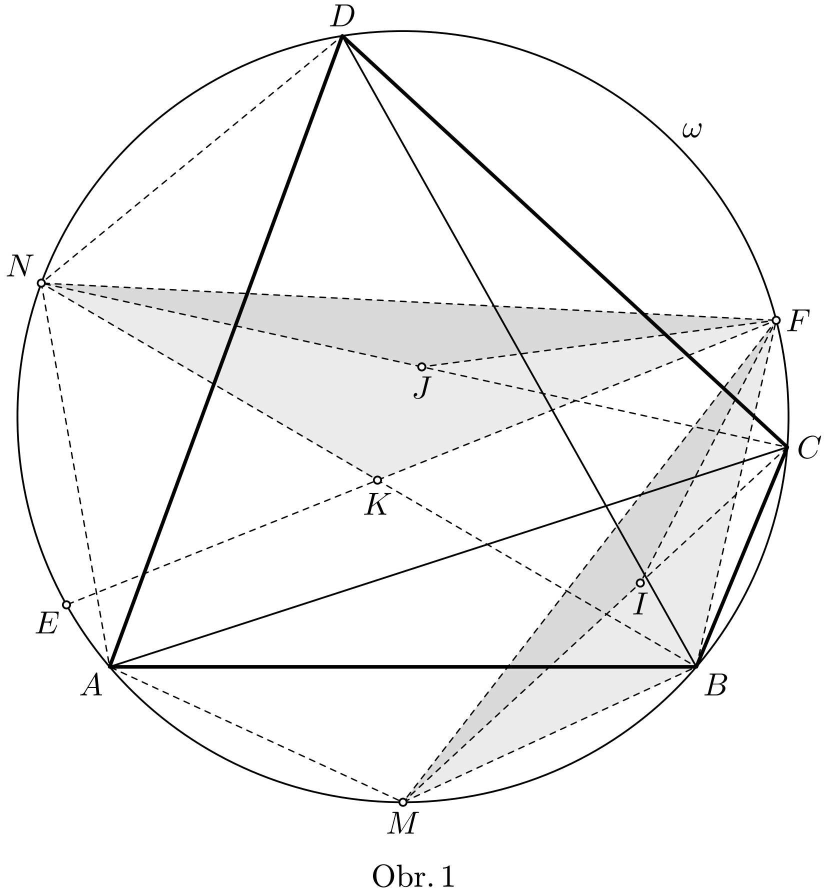
3. *Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$ s opísanou kružnicou ω. Označme postupne I, J, K stredy kružníc vpísaných do trojuholníkov ABC, ACD, ABD. Nech E je stred oblúka DB kružnice ω obsahujúceho bod A. Priamka EK pretína kružnicu ω v bode F $(F \neq E)$. Dokážte, že body C, F, I, J ležia na jednej kružnici.* (Kamil Duszenko)

Riešenie. Nech M, N sú postupne stredy oblúkov AB, AD (neobsahujúcich žiadne iné vrcholy štvoruholníka $ABCD$). Ako vieme, stred I kružnice vpísanej trojuholníku ABC leží na priamke CM (ktorá je osou uhla BCA, čo vyplýva zo zhodnosti veľkostí obvodových uhlov nad zhodnými tetivami AM a BM), podobne J leží na CN a K leží na BN. Navyše platí

$$|MI| = |MA| = |MB| \qquad \text{a} \qquad |NJ| = |NA| = |ND| = |NK| \tag{1}$$

(tieto známe rovnosti vyplývajú z jednoduchého vyjadrenia veľkosti uhla AIB z trojuholníka AIB a veľkosti uhla AMB, resp. z analogických vyjadrení pre body J, K).

Poznamenajme, že bod K nutne leží vnútri rovnoramenného trojuholníka BDE (pretože ľahko možno odvodiť nerovnosti $|\measuredangle BDK| < |\measuredangle BDE|$ a $|\measuredangle DBK| < |\measuredangle DBE|$), a teda priamka EK pretína úsečku BD a bod F leží v polrovine BDC (obr. 1).



Obr. 1

Uvažujme oblúk BD kružnice ω obsahujúci bod A. Bod E je jeho stredom a body M a N sú stredy kratších oblúkov BA a AD, ktorých zjednotením je oblúk BD. Z toho vyplýva, že oblúky BM a EN majú rovnakú dĺžku (a podobne aj oblúky ME a ND). Z obvodových uhlov potom

$$|\measuredangle BFM| = |\measuredangle EFN| = |\measuredangle KFN|. \tag{2}$$

Taktiež platí

$$|\measuredangle BMF| = |\measuredangle BNF| = |\measuredangle KNF|. \tag{3}$$

Z rovností (2) a (3) dostávame podobnosť trojuholníkov MBF a NKF, preto

$$\frac{|MB|}{|MF|} = \frac{|NK|}{|NF|},$$

čo s využitím (1) upravíme na

$$\frac{|MI|}{|MF|} = \frac{|NJ|}{|NF|}.$$

Z toho vzhľadom na rovnosti

$$|\measuredangle IMF| = |\measuredangle CMF| = |\measuredangle CNF| = |\measuredangle JNF|$$

vyplýva podobnosť trojuholníkov MIF a NJF, odkiaľ

$$|\measuredangle IFM| = |\measuredangle JFN| \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle IFJ| = |\measuredangle MFN|.$$

Spolu máme

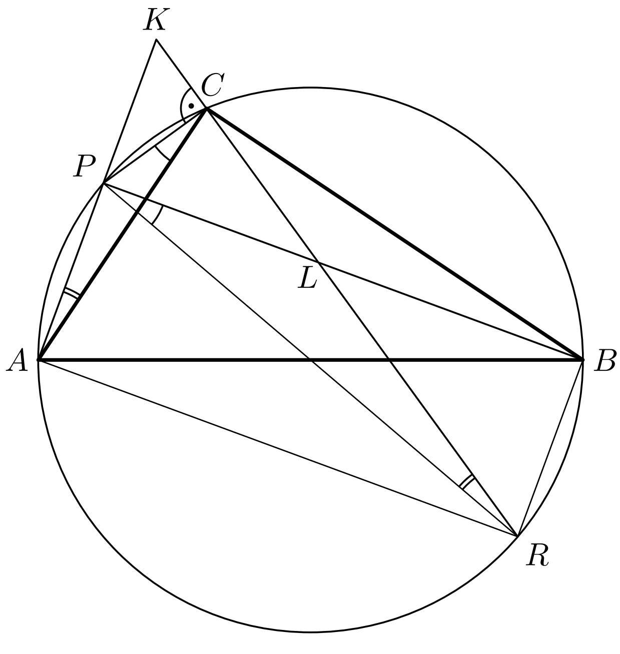
$$|\measuredangle IFJ| = |\measuredangle MFN| = |\measuredangle MCN| = |\measuredangle ICJ|,$$

teda body C, F, I, J ležia na jednej kružnici.

---

4. *Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB a bod P ležiaci vnútri kratšieho oblúka AC kružnice opísanej trojuholníku ABC. Kolmica na priamku CP prechádzajúca bodom C pretína priamky AP, BP postupne v bodoch K, L. Dokážte, že pomer obsahov trojuholníkov BKL a ACP nezávisí od polohy bodu P.* (Tomáš Jurík)

Riešenie. V riešení budeme pre obsah trojuholníka XYZ používať označenie S_{XYZ}.



Obr. 2

Nech PR je priemer kružnice opísanej trojuholníku ABC (obr. 2). Zrejme $ARBP$ je pravouholník. Keďže strany BR, PA sú rovnobežné, máme $S_{PBK} = S_{PRK}$, odkiaľ

$$S_{BKL} = S_{LPR}.$$

Z rovnosti $|PA| = |BR|$ vyplýva $|\measuredangle PCA| = |\measuredangle BPR| = |\measuredangle LPR|$.

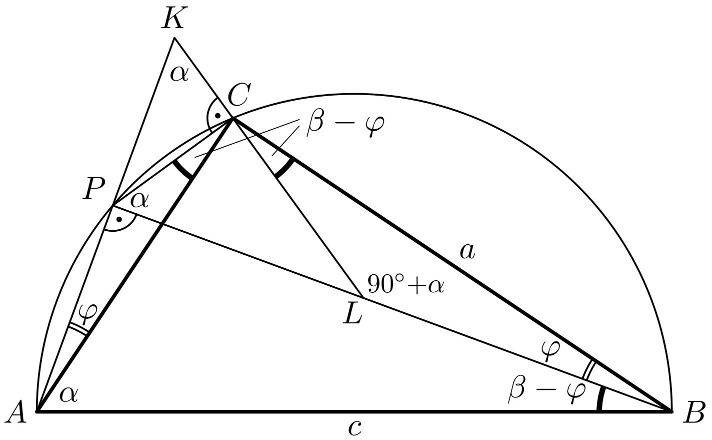
Štvoruholník $CPAR$ je tetivový, takže $|\measuredangle CAP| = |\measuredangle CRP|$ a teda trojuholníky LPR a PCA sú podobné.

Napokon dostávame

$$S_{BKL} : S_{ACP} = S_{LPR} : S_{ACP} = |PR|^2 : |AC|^2 = |AB|^2 : |AC|^2,$$

čo je hodnota nezávislá od polohy bodu P.

Iné riešenie. Veľkosti strán a uhlov trojuholníka ABC označíme zvyčajným spôsobom. Ďalej označíme $\varphi = |\measuredangle PAC|$ (obr. 3). Potom $|\measuredangle CPB| = \alpha$, $|\measuredangle PBC| = \varphi$, $|\measuredangle LCB| = |\measuredangle ACP| = |\measuredangle ABP| = \beta - \varphi$, $|\measuredangle BLC| = |\measuredangle APC| = 90° + \alpha$, $|AP| = c\cos(\alpha + \varphi)$, $|BP| = c\sin(\alpha + \varphi)$, $|\measuredangle PKL| = \alpha$.



Obr. 3

Zo sínusových viet pre trojuholníky BCP a BCL máme

$$|CP| = \frac{|BC|\sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{a\sin\varphi}{\sin\alpha},$$
$$|BL| = \frac{|BC|\sin(\beta-\varphi)}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{a\cos(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha}.$$

Ďalej

$$|PL| = |BP| - |BL| = c\sin(\alpha+\varphi) - \frac{a\cos(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha} =$$
$$= \frac{c\sin(\alpha+\varphi)\cos\alpha - c\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha} = \frac{c\sin\varphi}{\cos\alpha},$$
$$|KL| = \frac{|PL|}{\sin\alpha} = \frac{c\sin\varphi}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Pomer obsahov trojuholníkov je

$$\frac{S_{KLB}}{S_{APC}} = \frac{\frac{1}{2}|BL| \cdot |KL| \cdot \sin(90^\circ + \alpha)}{\frac{1}{2}|AP| \cdot |CP| \cdot \sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{|BL| \cdot |KL|}{|AP| \cdot |CP|} = \frac{\frac{a\cos(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha} \cdot \frac{c\sin\varphi}{\sin\alpha\cos\alpha}}{c\cos(\alpha+\varphi) \cdot \frac{a\sin\varphi}{\sin\alpha}} = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

veľkosť uhla α je zrejme nezávislá od polohy bodu P.

Poznámka. Predošlé riešenie môžeme skrátiť, keď si všimneme, že z veľkostí uhlov vyplýva podobnosť trojuholníkov BLC a APC (obr. 3). Z toho $|BL|/|AP| = |LC|/|PC|$ a zadaný pomer možno vyjadriť vzťahom

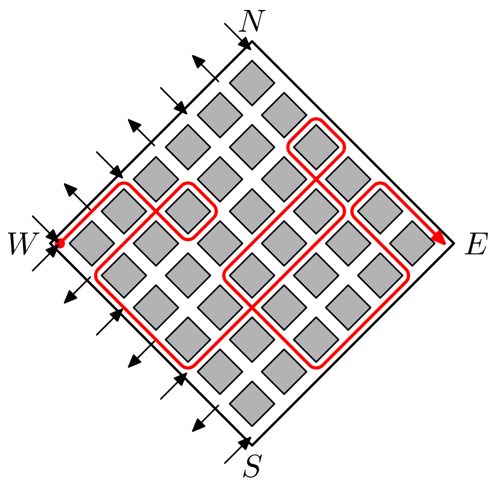
$$\frac{S_{KLB}}{S_{APC}} = \frac{|BL| \cdot |KL|}{|AP| \cdot |CP|} = \frac{|LC| \cdot |KL|}{|PC|^2}.$$

Z pravouhlého trojuholníka KLP s výškou PC máme podľa Euklidovej vety o strane $|LC| \cdot |KL| = |LP|^2$, odkiaľ

$$\frac{S_{KLB}}{S_{APC}} = \frac{|LP|^2}{|PC|^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

---

5. *Mesto Mar del Plata má tvar štvorca $WSEN$ a je rozdelené $2(n+1)$ ulicami na $n \times n$ blokov, pričom n je dané párne číslo (ulice vedú aj po obvode štvorca). Každý blok má rozmer 100×100 metrov. Všetky ulice v Mar del Plata sú jednosmerné, majú rovnaký smer v celej svojej dĺžke a susedné rovnobežné ulice majú vždy opačný smer. Ulicou WS sa jazdí v smere z W do S a ulicou WN sa jazdí z W do N. V bode W štartuje polievacie auto. Chce sa dostať do bodu E a poliať pritom čo najviac ciest. Aká je dĺžka najdlhšej trasy, ktorú môže prejsť, ak po žiadnom 100-metrovom úseku nechce ísť viac ako raz? (Na obr. 4 je pre $n = 6$ znázornený plán mesta a jedna z možných – nie však najdlhších – trás polievacieho auta. Poz. tiež http://goo.gl/maps/JAzD.)*



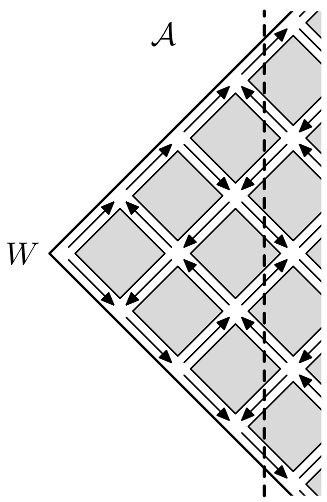
Obr. 4

(*Peter Novotný*)

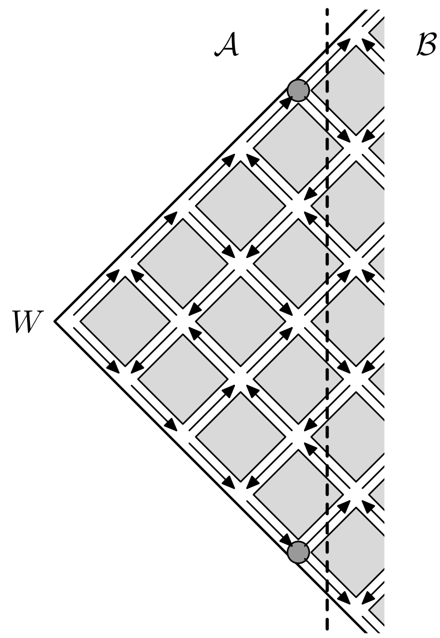
Riešenie. Každý 100-metrový úsek ulice medzi dvoma križovatkami budeme nazývať *šípka*. Šípku, ktorá má rovnaký smer ako ulica WS alebo WN (t. j. dá sa po nej ísť juhovýchodným alebo severovýchodným smerom), budeme nazývať *dopredná*, inak ju nazveme *spätná*.

V riešení použijeme nasledovnú zrejmú lemu: *Uvažujme ľubovoľné rozdelenie množiny všetkých križovatiek na dve disjunktné množiny $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ také, že $W \in \mathcal{A}$ a $E \in \mathcal{B}$. Potom počet prejazdov auta pozdĺž šípok z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ je o 1 väčší ako počet prejazdov pozdĺž šípok z $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$.*

Rozdeľme všetky križovatky mesta Mar del Plata na dve množiny $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ zvislou (t. j. severo-južnou) priamkou spájajúcou dva body vzdialené $100k + 50$ metrov od W – jeden na ulici WN a druhý na ulici WS – pre nejaké $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Na obr. 5a a 5b je znázornené rozdelenie pre $k = 3$, resp. $k = 4$.



Obr. 5a



Obr. 5b

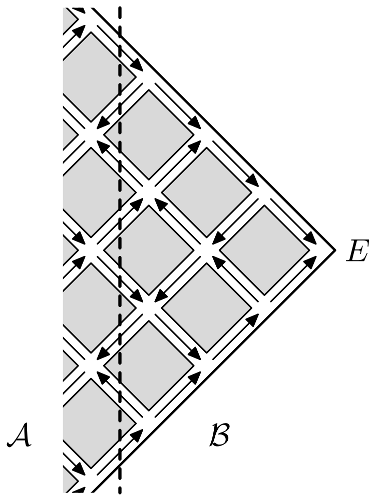
Ak k je nepárne, tak deliaca priamka pretína $k+1$ dopredných šípok (idúcich z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$) a $k+1$ spätných šípok (idúcich z $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$). Aj keby auto prešlo pozdĺž všetkých $k+1$ dopredných šípok, podľa lemy by prešlo len pozdĺž k spätných šípok. Preto aspoň jedna spätná šípka ostane nepoliata.

Ak k je párne a $k \geqq 2$, tak deliaca priamka pretína $k+2$ dopredných šípok a k spätných šípok. Dve najsevernejšie dopredné šípky preťaté priamkou začínajú v križovatke, ktorá má len jednu vchádzajúcu šípku. Túto križovatku dokáže auto prejsť len raz, takže aspoň jedna z dvoch najsevernejších dopredných šípok ostane nepoliata. To isté platí pre dve najjužnejšie dopredné šípky. Existuje teda nanajvýš k dopredných šípok, ktorými auto prejde, a podľa lemy nanajvýš $k-1$ spätných šípok. Spolu máme na tejto úrovni aspoň 3 nepoliate šípky.

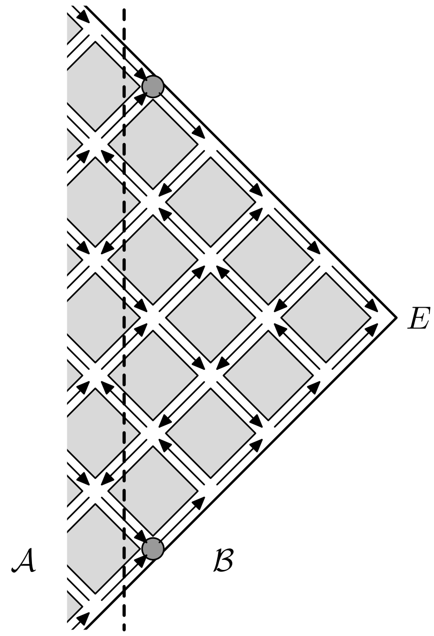
Pre $k = 0$ máme len dve dopredné šípky začínajúce vo W preťaté deliacou priamkou. Očividne iba jednou z nich môže auto prejsť, druhá ostane nepoliata.

Podobným spôsobom rozdelíme križovatky zvislými priamkami spájajúcimi dva body vo vzdialenostiach $100k+50$ metrov od E – jeden na ulici SE, druhý na ulici NE

– pre $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Situácia je znázornená na obr. 6a a 6b pre $k = 3$, resp. $k = 4$.



Obr. 6a



Obr. 6b

Ak k je nepárne, deliaca priamka pretína $k+1$ dopredných a $k+1$ spätných šípok; aspoň jedna zo spätných šípok ostane nepoliata.

Ak k je párne a $k \geqq 2$, tak deliaca priamka pretína $k+2$ dopredných a k spätných šípok. Dve najsevernejšie dopredné šípky končia v križovatke, odkiaľ vychádza iba jedna šípka, takže aspoň jedna z nich ostane nepoliata. To isté platí pre dve najjužnejšie dopredné šípky. Opäť máme nanajvýš k dopredných a nanajvýš $k-1$ spätných šípok, pozdĺž ktorých auto prejde, čiže na tejto úrovni ostanú aspoň 3 nepoliate šípky.

Pre $k = 0$ máme dve dopredné šípky končiace v E, jednu z nich auto prejde, druhá ostane nepoliata.

Pre každé nepárne k máme jednu, pre každé párne $k \geqq 2$ tri a pre $k = 0$ jednu nepoliatu šípku a celý postup sa zopakoval dvakrát. Keďže n je párne a $k \in \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, dokopy máme

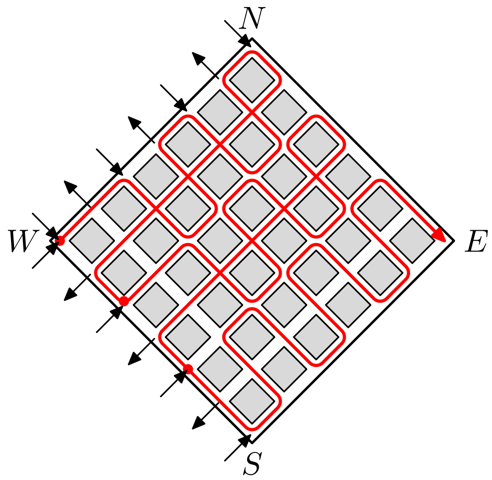
$$2\left(\tfrac{1}{2}n + 3(\tfrac{1}{2}n - 1) + 1\right) = 4n - 4$$

nepoliatych šípok. Celkový počet šípok je $n \cdot 2(n+1)$, takže auto nedokáže poliať viac ako

$$n \cdot 2(n+1) - (4n-4) = 2n^2 - 2n + 4$$

šípok.

Na druhej strane, existuje mnoho trás auta pozostávajúcich z $2n^2 - 2n + 4$ šípok. Jedna je načrtnutá na obr. 7 pre $n = 6$. Keď použijeme rovnaký vzor vo všeobecnom prípade, trasa bude rozdelená na $\frac{1}{2}n$ častí križovatkami ležiacimi na ulici WS vzdialenými $200k$ metrov od W pre $k = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n - 1$.



Obr. 7

Prvých $\frac{1}{2}n-1$ častí sa líši len posunutím. Každá z nich pozostáva z n šípok majúcich rovnaký smer ako WN, z n šípok opačného smeru ako WN a $2(n-1)$ šípok kolmých na WN. Posledná časť pozostáva z n šípok majúcich rovnaký smer ako WN a $2(n+1)$ šípok kolmých na WN. Celkový počet šípok na trase je

$$\left(\tfrac{1}{2}n-1\right)\left(2n+2(n-1)\right)+n+2(n+1)=2n^2-2n+4.$$

Odpoveď. Dĺžka najdlhšej možnej trasy polievacieho auta je $\frac{1}{10}(2n^2-2n+4)$ km.

---

6. *Kladné reálne čísla a, b, c, d spĺňajú podmienky*

$$abcd=4, \qquad a^2+b^2+c^2+d^2=10.$$

Určte najväčšiu možnú hodnotu výrazu $ab+bc+cd+da$. (Ján Mazák)

Riešenie. Označme $V=ab+bc+cd+da$. Určíme najväčšiu možnú hodnotu výrazu

$$V^2=(a+c)^2(b+d)^2=(a^2+c^2+2ac)(b^2+d^2+2bd). \tag{1}$$

Výraz V je „cyklický“ – jeho hodnota sa nezmení, ak hodnotu a zmeníme na b, b na c, c na d a d na a. Keďže $ac\cdot bd=4$, aspoň jedno z čísel ac, bd je aspoň 2. Vzhľadom na cyklickosť bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $bd\geqq 2$.

Zo zadaných rovností odvodíme $ac=4/bd$, $a^2+c^2=10-b^2-d^2$ a tieto vyjadrenia dosadíme do (1):

$$\begin{aligned}V^2&=\left(10-b^2-d^2+\frac{8}{bd}\right)(b^2+d^2+2bd)=\\&=10(b^2+d^2)+20bd+\frac{8(b^2+d^2)}{bd}+16-(b^2+d^2)^2-2bd(b^2+d^2).\end{aligned} \tag{2}$$

Označme $P=b^2+d^2$ a $Q=bd$; potom zrejme $P\geqq 2Q$ a podľa predpokladu $Q\geqq 2$. Po dosadení do (2) pokračujeme v úpravách:

$$\begin{aligned}V^2&=10P+20Q+\frac{8P}{Q}+16-P^2-2PQ=\\&=-(P^2-10P+25)+\left(41-2PQ+20Q+\frac{8P}{Q}\right)=\\&=-(P-5)^2+\left[P\left(\frac{8}{Q}-2Q\right)+41+20Q\right].\end{aligned}$$

Zrejme $-(P-5)^2 \leqq 0$. Z podmienky $Q \geqq 2$ vyplýva $8/Q - 2Q \leqq 8/2 - 2 \cdot 2 = 0$, takže výraz v hranatých zátvorkách je nerastúcou lineárnou funkciou v premennej P a nadobúda svoje maximum pre najmenšie možné P. Vzhľadom na $P \geqq 2Q$ dostávame

$$V^2 \leqq 2Q\left(\frac{8}{Q} - 2Q\right) + 41 + 20Q = -4Q^2 + 20Q + 57 = -(2Q-5)^2 + 82 \leqq 82.$$

Na záver stačí nájsť kladné reálne čísla a, b, c, d také, že $V = \sqrt{82}$. Rovnosť nastáva, keď $P = 2Q = 5$, čo je splnené pre $b = d = \frac{1}{2}\sqrt{10}$. Čísla a, c spĺňajú $a^2 + c^2 = 5$, $ac = 8/5$, teda

$$\{a, c\} = \left\{\frac{\sqrt{41}-3}{2\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{41}+3}{2\sqrt{5}}\right\}.$$

Odpoveď. Najväčšia možná hodnota výrazu $ab + bc + cd + da$ je $\sqrt{82}$.