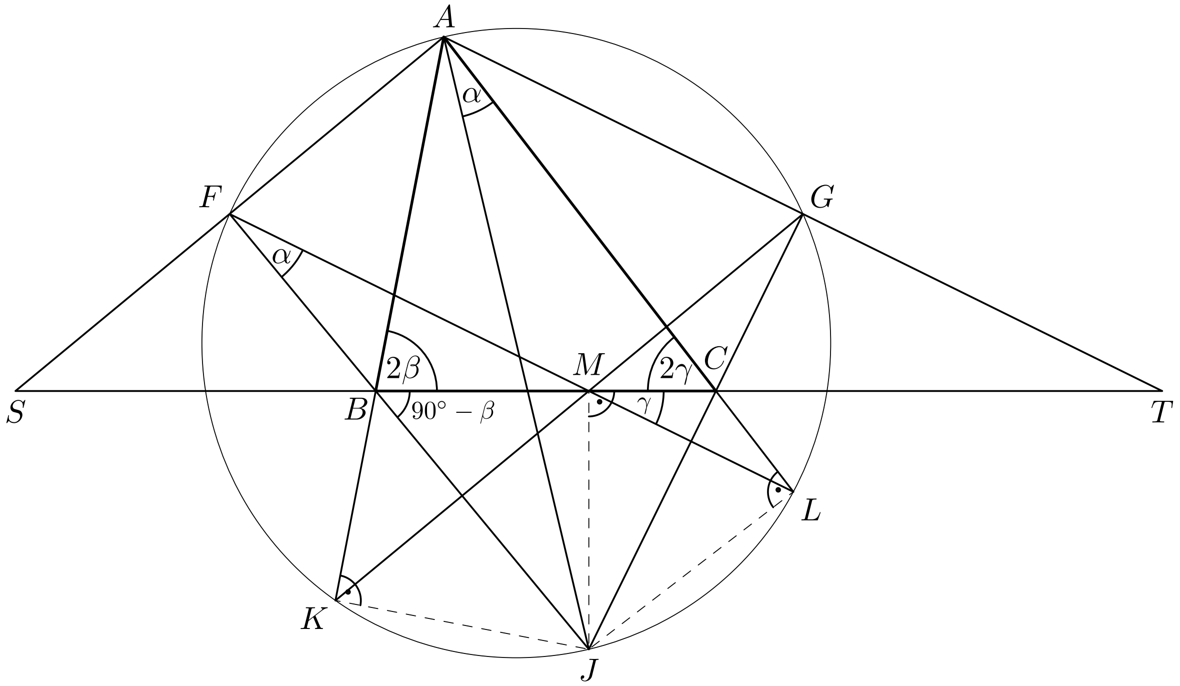
61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh IMO*

1. *Daný je trojuholník ABC. Označme J stred kružnice pripísanej k strane BC. Táto kružnica sa dotýka strany BC v bode M a priamok AB, AC postupne v bodoch K, L. Priamky LM a BJ sa pretínajú v bode F, priamky KM a CJ v bode G. Nech S je priesečník priamok AF, BC a T priesečník priamok AG, BC. Dokážte, že M je stredom úsečky ST.* (Grécko)

Riešenie. Označme veľkosti uhlov pri vrcholoch A, B, C postupne 2α, 2β, 2γ. Uhly AKJ a ALJ sú pravé, preto K aj L ležia na Tálesovej kružnici k s priemerom AJ. Kľúčovým pozorovaním je to, že aj body F a G ležia na tejto kružnici. To teraz dokážeme.

Bod J leží na osi uhla CAB, preto uhol LAJ má veľkosť α. Stačí dokázať, že aj uhol LFJ má veľkosť α (body A a F ležia v tej istej polrovine vzhľadom na priamku JL, lebo polpriamka opačná k ML, na ktorej leží bod F, leží celá v polrovine BCA). Bod J leží na vonkajších osiach uhlov pri vrcholoch B a C, preto uhol CML má veľkosť γ a uhol MBJ má veľkosť $90° - \beta$. Z trojuholníka BMF dostaneme, že $|\measuredangle LFJ| = |\measuredangle MBJ| - |\measuredangle BMF| = 90° - \beta - \gamma = \alpha$, čiže bod F leží na kružnici k. Analogicky dokážeme, že aj G leží na k.



Obr. 1

Keďže bod F leží na kružnici k, je priamka AF kolmá na FJ. Lenže FJ je osou vonkajšieho uhla pri vrchole B a $KM \perp FJ$, preto je úsečka SM osovo súmerná s úsečkou AK, a vďaka tomu $|SM| = |AK|$. Analogicky $|TM| = |AL|$. Avšak AK aj AL sú dotyčnice k pripísanej kružnici so stredom J, čiže $|AK| = |AL|$. Preto $|SM| = |MT|$ a teda bod M je stredom úsečky ST.

2. *Dané je celé číslo $n \geqq 3$. Nech a_2, a_3, $\ldots$, a_n sú kladné reálne čísla spĺňajúce $a_2a_3\cdots a_n = 1$. Dokážte, že*

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n > n^n.$$

(*Austrália*)

Riešenie. Keby sme priamočiaro použili nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom na každý súčet na ľavej strane, dostaneme jej dolný odhad, v ktorom sa mocniny čísel a_2, a_3, $\ldots$, a_n líšia, a teda nebudeme môcť priamo využiť väzbu. Preto pred použitím tejto nerovnosti vhodne členy „navážime“. Dostaneme odhad

$$(1+a_k)^k = \left((k-1)\frac{1}{k-1} + a_k\right)^k \geqq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}a_k$$

platný pre každé celé číslo $k \geqq 2$. Rovnosť v tomto odhade nastáva pre $a_k = 1/(k-1)$, čo je pre $k > 2$ menej ako 1.

Vynásobením takýchto odhadov pre $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ dostaneme

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\ldots(1+a_n)^n \geqq n^n a_2a_3\ldots a_n = n^n.$$

Rovnosť však nemôže nastať: ak by nastala, tak $a_2 = 1$ a a_k by bolo menšie ako 1 pre všetky $k \geqq 3$, to je však pre $n \geqq 3$ spor s podmienkou $a_2a_3\ldots a_n = 1$.

Iné riešenie. Matematickou indukciou dokážeme nasledujúce silnejšie tvrdenie:

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\ldots(1+a_n)^n \geqq n^n a_2a_3\ldots a_n,$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď zároveň platí $a_k = 1/(k-1)$ pre každé $k \in$ $\in \{2, 3, \ldots, n\}$.

Pre $n = 2$ je nerovnosť $(1+a_2)^2 \geqq 4a_2$ ekvivalentná s $(a_2-1)^2 \geqq 0$; rovnosť nastane pre $a_2 = 1$.

V druhom kroku nám po využití indukčného predpokladu stačí dokázať, že

$$(1+a_{n+1})^{n+1} \geqq \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}a_{n+1}. \tag{1}$$

Uvažujme funkciu

$$f(x) = (1+x)^{n+1} - \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}x$$

definovanú na množine kladných reálnych čísel. Táto funkcia je na celom definičnom obore diferencovateľná a jej derivácia je

$$f'(x) = (n+1)(1+x)^n - \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{n+1}{n^n}\big((n+nx)^n - (n+1)^n\big).$$

Funkcia f je klesajúca na intervale $(0, 1/n)$, kde má zápornú deriváciu, a rastúca na intervale $(1/n, \infty)$, kde má kladnú deriváciu. Preto funkcia f má v bode $x = 1/n$ globálne minimum. Z $f(1/n) = 0$ potom vyplýva platnosť odhadu (1) a tiež to, že v ňom rovnosť nastáva len pre $a_{n+1} = 1/n$.

3. *Hru „Myslím si číslo“ s povoleným klamaním hrajú dvaja hráči A a B. Pravidlá hry závisia od dvoch kladných celých čísel k a n, ktoré poznajú obaja hráči.*

Na začiatku hry hráč A zvolí dve celé čísla x a N, pričom $1 \leqq x \leqq N$. Číslo x hráč A uchová v tajnosti a pravdivo prezradí hráčovi B číslo N. Hráč B sa potom pokúša zistiť informácie o čísle x kladením otázok hráčovi A nasledovným spôsobom: každá jeho otázka pozostáva z voľby ľubovoľnej množiny kladných celých čísel S (môže to byť aj rovnaká množina, akú použil v niektorej predošlej otázke) a opýtania sa hráča A, či číslo x patrí do S. Hráč B môže položiť toľko otázok, koľko len chce. Hráč A musí na každú z otázok hráča B okamžite odpovedať áno alebo nie, môže však klamať, koľko sa mu zachce. Jediným obmedzením je, že medzi každými $k+1$ po sebe idúcimi odpoveďami hráča A musí byť aspoň jedna odpoveď pravdivá.

Potom, ako hráč B položí toľko otázok, koľko chce, určí množinu X obsahujúcu nanajvýš n kladných celých čísel. Ak x patrí do X, hráč B vyhral; inak prehral. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1. *Ak $n \geqq 2^k$, tak hráč B má víťaznú stratégiu.*
2. *Pre každé dostatočne veľké číslo k existuje celé číslo $n \geqq 1{,}99^k$ také, že B nemá víťaznú stratégiu.*

(*Kanada*)

Riešenie. a) (Podľa *Eduarda Batmendijna.*) Víťazná stratégia hráča B vyzerá nasledovne. Začneme s množinou $M = \{1, 2, \dots, N\}$ a budeme túto množinu postupne zmenšovať tak, aby stále obsahovala číslo x. Keď bude mať M nanajvýš 2^k prvkov, prehlásime ju za finálnu odpoveď.

Predpokladajme, že M obsahuje viac ako 2^k prvkov. Ukážeme, ako ju zmenšiť. Zvoľme ľubovoľné $y \in M$. Budeme sa hráča A opakovane pýtať na množinu $\{y\}$. Ak A odpovie $k+1$ ráz „nie“, vieme, že $y \neq x$, preto môžeme y z M odstrániť a zopakovať celý postup s novou menšou množinou M.

Ak hráč A na niektorú z našich otázok odpovedal „áno“, tak vlastne povedal „nie“ pre množinu $P_1 = M - \{y\}$. Množina P_1 obsahuje aspoň 2^k prvkov, lebo M obsahovala viac ako 2^k prvkov. Pritom vieme, že pre každý prvok množiny P_1 už A raz odpovedal „nie“. Množinu P_1 rozdelíme na dve rovnako veľké časti a spýtame sa na jednu z nich. Či už A odpovie „áno“ alebo „nie“, vieme to interpretovať ako „nie“ pre jednu z našich častí; označme ju P_2. Pre každý prvok v P_2 už A dvakrát odpovedal „nie“. Množinu P_2 opäť rozdelíme na dve rovnako veľké podmnožiny a tento postup opakujeme, až kým nedostaneme množinu P_{k+1}. (Množina P_{k+1} je neprázdna, lebo P_1 obsahovala aspoň 2^k prvkov.) Pre ľubovoľný jej prvok z hráč A dal $k+1$ po sebe idúcich odpovedí „nie“ a aspoň raz musel vravieť pravdu, preto $z \neq x$ a môžeme ho odstrániť z M.

b) Dokážeme, že ak $\lambda \in (1, 2)$ a $n = \lfloor (2-\lambda)\lambda^{k+1} \rfloor - 1$, hráč B si nedokáže zabezpečiť víťazstvo. Na dokončenie dôkazu potom stačí zvoliť $\lambda \in (1{,}99; 2)$ a k dostatočné veľké na to, aby platilo $n \geqq 1{,}99^k$.

Predpokladajme, že hráč B sa pýta na množinu S. O odpovedi hráča A budeme hovoriť, že *nie je v súlade s prvkom i*, ak $i \in S$ a odpoveď je „nie“, alebo $i \notin S$ a odpoveď je „áno“. Odpoveď je nepravdivá práve vtedy, keď nie je v súlade s prvkom x.

Uvažujme nasledujúcu stratégiu hráča A. Najprv zvolí $N = n + 1$ a ľubovoľné $x \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Po každej svojej odpovedi hráč A pre každé $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ určí počet m_i po sebe idúcich predchádzajúcich odpovedí, ktoré nie sú v súlade s i. Pri rozhodovaní o svojej nasledujúcej odpovedi využije hodnotu

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^{m_i}.$$

Bez ohľadu na otázku hráča B odpovie A tak, aby minimalizoval hodnotu φ.

Tvrdíme, že pri tejto stratégii je hodnota φ vždy menšia ako λ^{k+1}. Žiadny z exponentov m_i potom nemôže presiahnuť k, a teda hráč A pre žiadne i nepovie viac ako k po sebe idúcich odpovedí, ktoré nie sú v súlade s i. Preto nebude klamať viac ako k-krát po sebe. Takáto stratégia vyhovuje pravidlám; navyše vôbec nezávisí od voľby x, čiže nedáva hráčovi B žiadnu informáciu. Ostáva dokázať, že φ je vždy menšie ako λ^{k+1}.

Na začiatku je $m_i = 0$ pre každé i, preto $\varphi = n + 1$ a platnosť nášho tvrdenia vyplýva z voľby $n = \lfloor (2-\lambda)\lambda^{k+1} \rfloor - 1$ a podmienky $\lambda \in (1, 2)$. Predpokladajme, že v niektorom momente je $\varphi < \lambda^{k+1}$ a hráč B sa pýta, či $x \in S$ pre nejakú množinu S. Podľa toho, či hráč A odpovie „áno“ alebo „nie“, bude nová hodnota φ

$$\varphi_1 = \sum_{i \in S} 1 + \sum_{i \notin S} \lambda^{m_i+1} \qquad \text{alebo} \qquad \varphi_2 = \sum_{i \in S} \lambda^{m_i+1} + \sum_{i \notin S} 1.$$

Keďže hráč A minimalizuje φ, bude nová hodnota rovná $\min\{\varphi_1, \varphi_2\}$. Pritom

$$\min\{\varphi_1, \varphi_2\} \leqq \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i \in S} (1 + \lambda^{m_i+1}) + \sum_{i \notin S} (\lambda^{m_i+1} + 1) \right) = \frac{1}{2}(\lambda\varphi + n + 1).$$

Keďže $\varphi < \lambda^{k+1}$, z predpokladov $\lambda < 2$ a $n = \lfloor (2-\lambda)\lambda^{k+1} \rfloor - 1$ dostaneme

$$\min\{\varphi_1, \varphi_2\} < \frac{1}{2}(\lambda^{k+2} + (2-\lambda)\lambda^{k+1}) = \lambda^{k+1}.$$

Tým sme dôkaz ukončili.

---

4. *Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že pre všetky celé čísla a, b, c spĺňajúce $a + b + c = 0$ platí*

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(*Južná Afrika*)

Riešenie. Po dosadení $a = b = c = 0$ vidíme, že $3f(0)^2 = 6f(0)^2$, preto $f(0) = 0$. Dosadením $b = -a$, $c = 0$ dostaneme $(f(a) - f(-a))^2 = 0$, a teda $f(-a) = f(a)$ pre každé celé číslo a, čiže funkcia f je párna.

Zvoľme $b = a$ a $c = -2a$; dostaneme $2f(a)^2 + f(2a)^2 = 2f(a)^2 + 4f(a)f(2a)$. Preto

$$f(2a) = 0 \quad \text{alebo} \quad f(2a) = 4f(a) \qquad \text{pre každé } a \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Ak $f(r) = 0$ pre nejaké $r \geqq 1$, zo substitúcie $b = r$ a $c = -a - r$ dostaneme $(f(a + r) - f(a))^2 = 0$, čiže funkcia f je periodická s periódou r.

Ak $f(1)=0$, tak f je konštantná nulová funkcia. Tá je evidentne riešením zadanej rovnice. Vo zvyšku riešenia budeme predpokladať, že $f(1)=k\neq 0$.

Zo vzťahu (1) vidíme, že buď $f(2)=0$, alebo $f(2)=4k$. Ak $f(2)=0$, tak funkcia f je periodická s periódou 2 a teda jej funkčné hodnoty v párnych číslach sú nulové a v nepárnych číslach sú všetky rovné k. Takáto funkcia je riešením; skúšku správnosti však v tejto chvíli odložíme a budeme vo zvyšku riešenia predpokladať, že $f(2)=4k\neq$ $\neq 0$.

Opätovným využitím vzťahu (1) dostaneme, že buď $f(4)=0$, alebo $f(4)=16k$. V prvom prípade je funkcia f periodická s periódou 4. Pritom $f(3)=f(-1)=f(1)=k$, čiže periodicky sa budú postupne opakovať hodnoty 0, k, $4k$, k. Aj takáto funkcia je riešením (overíme neskôr); vo zvyšku riešenia budeme predpokladať, že $f(4)=16k\neq 0$.

Teraz dokážeme, že $f(3)=9k$. Najprv zo substitúcie $a=1$, $b=2$, $c=-3$ dostaneme $f(3)^2-10kf(3)+9k^2=0$, preto $f(3)\in\{k,9k\}$. Následne zo substitúcie $a=1$, $b=3$, $c=-4$ dostaneme $f(3)^2-34kf(3)+225k^2=0$, preto $f(3)\in\{9k,25k\}$. Niet teda inej možnosti ako $f(3)=9k$.

Nakoniec matematickou indukciou dokážeme, že $f(x)=kx^2$ pre všetky celé čísla x. Doteraz sme ukázali, že je to pravda pre $x\in\{0,1,2,3,4\}$. V druhom kroku indukcie budeme predpokladať, že $n\geqq 4$ a že $f(x)=kx^2$ pre všetky celé čísla x z množiny $\{0,1,\dots,n\}$. Dosadenia $a=n$, $b=1$, $c=-n-1$ a $a=n-1$, $b=2$, $c=-n-1$ vedú k tomu, že

$$f(n+1)\in\{k(n+1)^2,k(n-1)^2\}\qquad\text{a}\qquad f(n+1)\in\{k(n+1)^2,k(n-3)^2\}.$$

Keďže pre $n\neq 2$ sú hodnoty $k(n-1)^2$ a $k(n-3)^2$ rôzne, jedinou možnosťou je $f(n+1)=$ $=k(n+1)^2$. Tým sme ukončili druhý krok indukcie a dokázali, že $f(x)=kx^2$ pre všetky nezáporné celé x. Keďže funkcia f je párna, platí to aj pre záporné x. Pri overovaní tohto riešenia stačí dokázať, že $a^4+b^4+(a+b)^4=2a^2b^2+2a^2(a+b)^2+2b^2(a+b)^2$, to však vidno z roznásobenia jednotlivých strán.

Jedinými možnými riešeniami zadanej funkcionálnej rovnice sú teda konštantná funkcia $f_1(x)=0$ a funkcie $f_2(x)=kx^2$,

$$f_3(x)=\begin{cases}0 & \text{pre } x \text{ párne},\\ k & \text{pre } x \text{ nepárne},\end{cases}\qquad f_4(x)=\begin{cases}0 & \text{pre } x\equiv 0 \pmod 4,\\ k & \text{pre } x\equiv 1 \pmod 2,\\ 4k & \text{pre } x\equiv 2 \pmod 4\end{cases}$$

pre ľubovoľné nenulové celé číslo k.[1] Ostáva spraviť skúšku správnosti pre funkcie f_3 a f_4. Začneme funkciou f_3. Ak $a+b+c=0$, tak buď sú a, b, c všetky párne, vtedy $f(a)=f(b)=f(c)=0$, alebo jedno je párne a dve sú nepárne, vtedy hodnota oboch strán zadanej rovnice je $2k^2$. Pre funkciu f_4 podobnou úvahou s využitím symetrie zadanej rovnice zistíme, že stačí overiť trojice $(0,k,k)$, $(4k,k,k)$, $(0,0,0)$, $(0,4k,4k)$. Pre každú z nich platí rovnosť.

[1] Funkcie f_2, f_3, f_4 samozrejme vyhovujú aj pre $k=0$, vtedy sú však totožné s funkciou f_1.

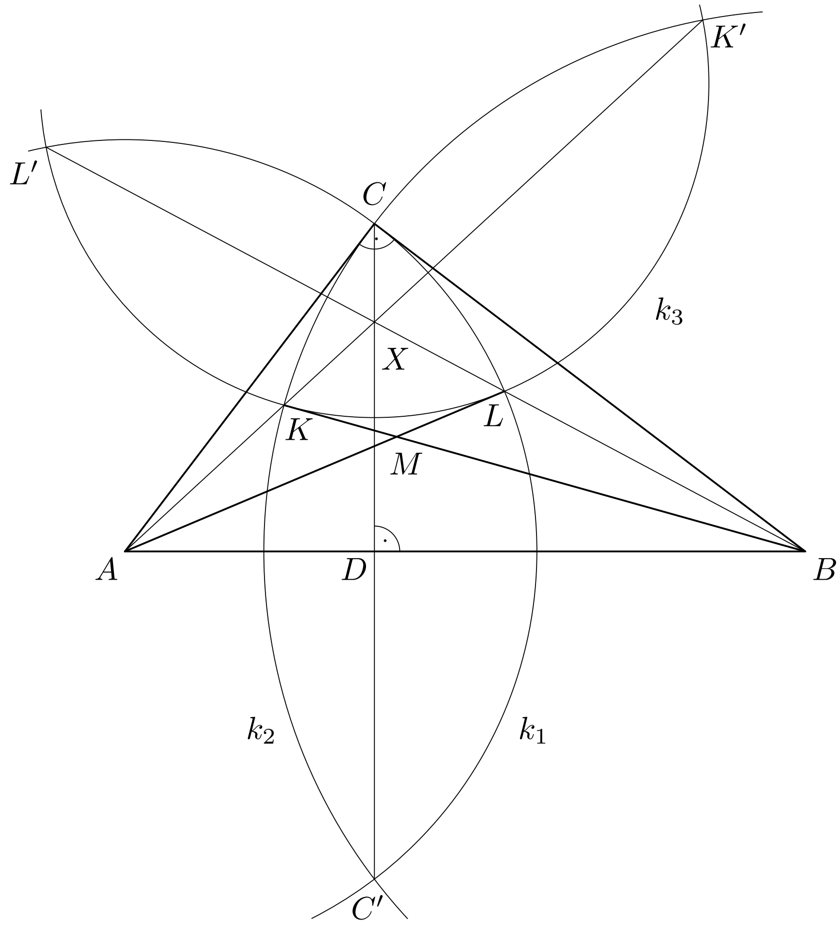
5. *V danom pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C označme D pätu výšky z vrcholu C. Nech X je ľubovoľný vnútorný bod úsečky CD. Označme K taký bod na úsečke AX, že $|BK| = |BC|$. Podobne označme L taký bod na úsečke BX, že $|AL| = |AC|$. Priesečník priamok AL a BK označme M. Dokážte, že $|MK| = |ML|$.*
(Česká rep., Josef Tkadlec)

Riešenie. Označme C' obraz bodu C v osovej súmernosti podľa priamky AB. Kružnica k_1 má stred v bode A a prechádza bodmi C, L a C'. Kružnica k_2 má stred v bode B a prechádza bodmi C, K a C'. Keďže uhol ACB je pravý, v bode C sa priamka AC dotýka k_2 a priamka BC sa dotýka k_1. Označme K' priesečník priamky AX s k_2 rôzny od K a L' priesečník priamky BX s k_1 rôzny od L.

Z mocnosti bodu X ku kružniciam k_1 a k_2 dostaneme

$$|XK| \cdot |XK'| = |XC| \cdot |XC'| = |XL| \cdot |XL'|,$$

čiže body L', K, L, K' ležia na jednej kružnici k_3.



Obr. 2

Z mocnosti bodu A ku kružnici k_2 máme $|AL|^2 = |AC|^2 = |AK| \cdot |AK'|$, preto AL je dotyčnicou ku k_3 v bode L. Analogicky BK je dotyčnicou ku k_3 v bode K. Takže priamky MK a ML sú dotyčnice z bodu M ku kružnici k_3, a preto $|MK| = |ML|$.

6. *Určte všetky kladné celé čísla n, pre ktoré existujú nezáporné celé čísla a_1, a_2, ..., a_n také, že*

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\dots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\dots+\frac{n}{3^{a_n}}=1.$$

(*Srbsko*)

Riešenie. Vhodné čísla a_1, a_2, ..., a_n existujú pre n so zvyškom 1 alebo 2 po delení štyrmi.

Najprv dokážeme, že táto podmienka je nutná. Predpokladajme, že $\sum_{k=1}^{n} k/3^{a_k} = 1$; nech a je najväčšie z čísel a_k. Po prenásobení 3^a dostaneme

$$1\cdot x_1+2\cdot x_2+\ldots+n\cdot x_n=3^a,$$

pričom x_k sú mocniny čísla 3. Pravá strana v získanej rovnosti je nepárna a ľavá má takú istú paritu ako súčet $1+2+\dots+n$. Preto n dáva zvyšok 1 alebo 2 po delení štyrmi. Ostáva dokázať, že uvedená podmienka je postačujúca.

Postupnosť b_1, b_2, ..., b_n budeme volať *prípustná*, ak existujú nezáporné celé čísla a_1, a_2, ..., a_n také, že

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{b_1}{3^{a_1}}+\frac{b_2}{3^{a_2}}+\ldots+\frac{b_n}{3^{a_n}}=1.$$

Pre danú postupnosť vieme robiť na jej členoch rôzne operácie. Vezmime prípustnú postupnosť b_1, b_2, ..., b_n (so zodpovedajúcimi exponentmi a_1, a_2, ..., a_n z definície prípustnosti) a zvoľme nezáporné celé čísla u, v so súčtom $3b_k$. Postupnosť b_1, b_2, ..., b_{k-1}, u, v, b_{k+1}, ..., b_n je tiež prípustná, pretože

$$\frac{1}{2^{a_k+1}}+\frac{1}{2^{a_k+1}}=\frac{1}{2^{a_k}} \qquad \text{a} \qquad \frac{u}{3^{a_k+1}}+\frac{v}{3^{a_k+1}}=\frac{b_k}{3^{a_k}}.$$

Toto môžeme sformulovať aj naopak: ak v postupnosti nahradíme dva členy u a v jedným členom $(u+v)/3$ a dostaneme tým prípustnú postupnosť, tak aj pôvodná postupnosť bola prípustná. (Tieto dva členy nemusia nasledovať bezprostredne po sebe.)

Predpokladajme, že $n \equiv 1$ alebo $n \equiv 2 \pmod 4$ a označme α_n postupnosť $1, 2, \dots, n$. Ukážeme, že postupnými úpravami typu $\{u, v\} \mapsto (u+v)/3$ možno zredukovať túto postupnosť na jednoprvkovú postupnosť α_1, ktorá je zjavne prípustná (s exponentom $a_1 = 0$). Špeciálnym prípadom tejto operácie je $\{m, 2m\} \mapsto m$, čiže môžeme vynechať číslo $2m$, ak postupnosť okrem neho obsahuje aj číslo m.

Predpokladajme, že $n \geqq 16$. Ukážeme, že α_n vieme zredukovať na α_{n-12} pomocou 12 operácií. Pre vhodné $k \geqq 1$ a $0 \leqq r \leqq 11$ platí $n = 12k + r$. Ak $r \in \{0, 1, \dots, 5\}$, z posledných 12 členov α_n vynecháme $12k-6$ a $12k$ a zvyšok rozdelíme na päť dvojíc

$$\{12k-6-i, 12k-6+i\},\ i \in \{1, 2, \dots, 5-r\}; \quad \{12k-j, 12k+j\},\ j \in \{1, 2, \dots, r\}.$$

Päť operácií vykonaných na uvedených pároch odstráni 10 čísel a pridá 5 nových čísel rovných $8k-4$ alebo $8k$. Všetky pridané čísla však môžeme vynechať, lebo $4k-2$ aj $4k$ ostali v postupnosti (nerovnosť $4k \leqq n-12$ je ekvivalentná nerovnosti $8k \geqq 12-r$, ktorej platnosť ľahko overíme pre každé r). Takto sme v tomto prípade úspešne zredukovali α_n na α_{n-12}.

V prípade $r \in \{6, 7, \ldots, 11\}$ postupujeme analogicky. Čísla $12k$ a $12k + 6$ vynecháme a zvyšok rozdelíme na dvojice

$$\{12k+6-i, 12k+6+i\},\ i \in \{1, 2, \ldots, r-6\}; \quad \{12k-j, 12k+j\},\ j \in \{1, 2, \ldots, 11-r\}.$$

Po aplikovaní operácie na jednotlivé páry nám pribudnú čísla $8k$ a $8k+4$, ktoré môžeme vynechať. Získame tak opäť α_{n-12}.

Ostáva vyšetriť $n \in \{2, 5, 6, 9, 10, 13, 14\}$. Prípady $n \in \{2, 6, 10, 14\}$ sa vynechaním posledného člena zredukujú na $n \in \{1, 5, 9, 13\}$. Pre $n = 5$ použijeme $\{4, 5\} \mapsto 3$, potom $\{3, 3\} \mapsto 2$ a nakoniec vynecháme dve dvojky. Pre $n = 9$ najprv vynecháme 6 a potom použijeme $\{5, 7\} \mapsto 4$, $\{4, 8\} \mapsto 4$, $\{3, 9\} \mapsto 4$. Ďalej vynecháme tri štvorky a nakoniec vynecháme dvojku. Prípad $n = 13$ sa dá použitím $\{11, 13\} \mapsto 8$ a vynechaním 8 a 12 previesť na prípad $n = 10$.