

2013/2014
63. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie A

(Súťaž sa konala v utorok 14. januára 2014.)

1. Nájdite všetky celé kladné čísla, ktoré nie sú mocninou čísla 2 a ktoré sa rovnajú súčtu trojnásobku svojho najväčšieho nepárneho deliteľa a päťnásobku svojho najmenšieho nepárneho deliteľa väčšieho ako 1. (Tomáš Jurík)

2. V rovine sú dané dve kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, pričom $|S_1S_2| > r_1 + r_2$. Nájdite množinu všetkých bodov X , ktoré neležia na priamke S_1S_2 a majú tú vlastnosť, že úsečky S_1X , S_2X pretínajú postupne kružnice k_1 , k_2 v bodoch, ktorých vzdialenosti od priamky S_1S_2 sa rovnajú. (Jaromír Šimša)

3. Nájdite všetky trojice reálnych čísel x , y a z , pre ktoré platí

$$x(y^2 + 2z^2) = y(z^2 + 2x^2) = z(x^2 + 2y^2).$$

(Michal Rolínek)

4. Volejbalového turnaja sa zúčastnilo šesť družstiev, každé hralo proti každému práve raz. V jednotlivých piatich kolách prebiehali v tom istom čase vždy tri zápasy na troch kurtoch 1, 2 a 3. Koľko bolo možností pre rozpis takého turnaja? Rozpisom rozumieme tabuľku 3×5 , v ktorej pre $i \in \{1, 2, 3\}$ a $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je na pozícii (i, j) uvedená dvojica družstiev (bez určenia poradia), ktoré hrali proti sebe v j -tom kole na kurte číslo i . Namiesto dekadického zápisu výsledného čísla stačí uviesť jeho rozklad na súčin prvočísel. (Martin Panák)